भूमिती

इयत्ता दहावी

1982

महाराष्ट्र राज्य माध्यमिक व उच्च माध्यमिक
शिक्षण मंडळ, पुणे 411 010

भूमिती

इयत्ता दहावी

1982

महाराष्ट्र राज्य माध्यमिक व उच्च माध्यमिक
शिक्षण मंडळ, पुणे 411 010

प्रथमावृत्ती 1974

सहावे पुनर्मुद्रण : 1982

प्रस्तुत पुस्तक माध्यमिक शिक्षण मंडळाच्या धोरणानुसार अभ्यास मंडळाच्या मार्गदर्शनाखाली लेखक मंडळाने तयार केले आहे.

अभ्यास मंडळ सदस्य :

1. डॉ. भा. स. फडणीस(आमंत्रक)
2. प्रा. अ. सि. मुळे
3. श्री. सू. ना. लिंग
4. श्री. ह. बा. दळवी
5. प्रा. रा. तु. कुलकर्णी
6. प्रा. म. रा. राईलकर
7. प्रा. स. शं. कहाळेकर
8. श्री. चि. म. वायकोळे

लेखक मंडळ सदस्य :

1. प्रा. के. वि. कुलकर्णी
2. प्रा. ज. ह. असनारे
3. श्री. नि. कृ. कावडकर
4. श्री. रा. भा. बाहेती

प्रस्तावना

महाराष्ट्र राज्य माध्यमिक शिक्षण मंडळाने नवीन अभ्यासक्रमानुसार इयत्ता दहावीची भाषेतर व भाषाविषयक विविध पाठ्यपुस्तके तयार केली आहेत. 'भूमिती' हे त्यांपैकी एक पाठ्यपुस्तक आहे.

विद्यार्थ्यांत तर्कदृष्टी निर्माण व्हावी आणि त्यामुळे या शाखांतील वेगवेगळया भागांतील परस्पर संबंध ओळखता यावेत, विद्यार्थ्यांना गणिताची भाषा समजावी, बोलता यावी आणि गणिते सोडवण्याची क्षमता त्यांच्यामध्ये निर्माण व्हावी, या आणि इतर शैक्षणिक उद्दिष्टांचा साकल्याने विचार करून लेखकांनी हे पुस्तक लिहिले आहे.

हे पुस्तक तयार करण्यास माध्यमिक शिक्षण मंडळाने नियुक्त केलेले लेखक, समीक्षक तसेच अभ्यास मंडळाचे सदस्य या सर्वांनी आत्मीयतेने परिश्रम घेतले आणि मंडळाशी संपूर्ण सहकार्य केले त्याबद्दल मंडळ त्यांचे अत्यंत ऋणी आहे.

पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळाचे संचालक यांनी दिलेल्या सहकार्याबद्दल व मंडळाचे नियंत्रक यांनी हे पुस्तक सुबक व आकर्षक स्वरूपात वेळेवर उपलब्ध करून दिले त्याबद्दल त्यांना मनःपूर्वक धन्यवाद.

(सही)

पुणे
31 जानेवारी, 1974
11 माघ 1895

अध्यक्ष
माध्यमिक शिक्षण मंडळ आणि
अपर शिक्षण संचालक, महाराष्ट्र राज्य, पुणे.

कागद :
व्हाइट प्रिंटींग पेपर
70 जी.एस.एम. 20x28

मुद्रणादेश :
PO-TB/1237/25,000
of 11.12.1981

T.Bennex,
Evergreen Printers,
Bombay 400 011

प्रकाशक :
श्री. र. वोकील
सचिव
महाराष्ट्र राज्य माध्यमिक व उच्च माध्यमिक शिक्षण मंडळ, पुणे - 411 010

निर्मिती व वितरण :
महाराष्ट्र राज्य
पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे—411004

प्रतिज्ञा

भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत.

माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.

मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन.

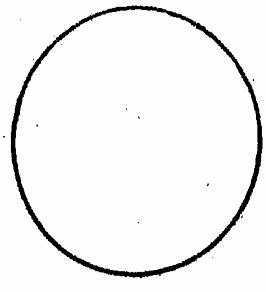
माझा देश आणि माझे देशबांधव ह्यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे.

अनुक्रमणिका

प्रकरण 1 : वर्तुळ

§ 1·1 यापूर्वी आपण प्रतल, अर्धप्रतल, किरण, रेषाखंड इ. बिंदूसंचांचा अभ्यास केला. कोन हा समाईक अंत्यबिंदू असलेल्या अरेषीय किरणांचा संयोग आहे, द्वितल कोन हा दोन अर्धप्रतल व त्यांची समाईक कडा यांचा संयोग आहे; त्रिकोण हा काही विशिष्ट अटी पूर्ण करणाऱ्या तीन रेषाखंडांचा संयोग आहे.

या प्रकरणात आपल्याला आणखी एका वेगळ्या बिंदूसंचाचा अभ्यास करायचा आहे. या बिंदूसंचाची आकृती आपल्या परिचयाची आहे.



आ. 1·1

बाजूला दाखवलेली आकृती **वर्तुळाची** आहे हे तुम्हांस माहीत आहे.

'प्रतलातील गोलाकार क्षेत्राची सीमा दाखवणारी एक वक्ररेषा म्हणजे वर्तुळ' असे थोडक्यात म्हणता येईल.

तुम्ही अनेक वेळा कंपासच्या साहाय्याने वर्तुळ काढले असेल. वर्तुळ काढताना तुम्ही काय कृती केली? कंपासचे लोखंडी टोक कागदावर ठेवून पेन्सिलीच्या टोकाने कागदाच्या प्रतलात एक बिंदूसंच काढला. हा बिंदूसंच काढताना कंपासच्या दोन टोकांमधील अंतरासंबंधी तुम्ही कोणती काळजी घेतली? काढलेल्या बिंदूसंचातील प्रत्येक बिंदूचे स्थिर बिंदूपासूनचे अंतर कायम ठेवले. वर्तुळ काढताना कागद आपल्याला कसा ठेवावा लागला? कागद सपाट नसेल तर वर्तुळाची आकृती नीट काढता येत नाही हे तुमच्या ध्यानात आलेच असेल. पेन्सिलीच्या टोकाने काढलेले ते सर्व बिंदू एकाच प्रतलात असावे लागतात.

वरील कृती ध्यानात घेऊन वर्तुळाची व्याख्या आता आपल्याला खालीलप्रमाणे करता येईल.

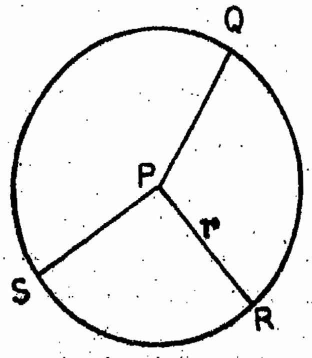
व्याख्या : दिलेल्या प्रतलातील एका ठराविक बिंदूपासून दिलेल्या अंतरावर असलेल्या त्या प्रतलातील बिंदूंचा संच म्हणजे वर्तुळ होय.

कागदाच्या प्रतलात वर्तुळ काढल्याने प्रतलातील बिंदूसंचाचे (वर्तुळावरील बिंदू सोडून) किती भागात विभाजन झाले? वर्तुळाच्या आतील बिंदूसंच व वर्तुळाच्या बाहेरील बिंदूसंच हे दोन्ही संच विभिन्न आहेत का? यांपैकी कोणत्या संचाला आपण वर्तुळाचा 'अंतर्भाग' म्हणू शकू? कोणत्या संचाला वर्तुळाचा 'बाह्यभाग' म्हणू? या दोन संचांपैकी कोणता 'बहिर्वक्र' संच आहे?

§ 1·2 काही संज्ञा :

दिलेल्या प्रतलातील दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या अंतरावर असलेल्या त्या प्रतलातील बिंदूंच्या संचाला **वर्तुळ** किंवा **वृत्त** (Circle) म्हणतात. म्हणजे, दिलेल्या प्रतलात जर P हा दिलेला बिंदू असेल आणि r ही कोणतीही धन वास्तव संख्या असेल तर P पासून r इतक्या अंतरावर असणाऱ्या त्या प्रतलातील सर्व बिंदूंचा संच म्हणजेच वर्तुळ किंवा वृत्त.

दिलेल्या बिंदूला (येथे बिंदू P) त्या वर्तुळाचा **केंद्रबिंदू** (Centre) व दिलेल्या अंतराला (येथे अंतर r) त्या वर्तुळाची **त्रिज्या** (Radius) म्हणतात.



आ. 1·2

बाजूच्या आकृतीत ज्याचा केंद्रबिंदू P आहे व त्रिज्या r आहे असे वर्तुळ दाखवले आहे. ह्याच आकृतीत रेख PQ, रेख PR व रेख PS हे असे रेषाखंड आहेत की ज्यांचे एक टोक वर्तुळाच्या केंद्रबिंदू असून दुसरे टोक वर्तुळावरील बिंदू आहे. अशा रेषाखंडांना-देखील वर्तुळाच्या **त्रिज्या** म्हणतात. रेख PQ, रेख PR व रेख PS या वर्तुळाच्या 'त्रिज्या' आहेत. त्रिज्येच्या दोन टोकांपैकी वर्तुळावर असलेल्या टोकाला '**त्रिज्येचे बाह्यटोक**' (Outer End of the Radius) असे म्हणतात.

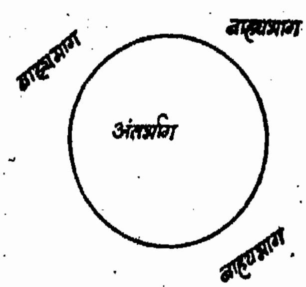
'त्रिज्या' ही संज्ञा दोन वेगवेगळया अर्थांनी आपण वापरणार आहोत, हे त्रिज्येच्या दोन वेगवेगळ्या व्याख्यांवरून तुमच्या लक्षात आलेच असेल. एक म्हणजे अंतर दाखवणारी संख्या या अर्थाने व दुसरा म्हणजे केंद्रबिंदू व वर्तुळावरील बिंदू यांना जोडणारा रेषाखंड या अर्थाने जसे, 'वर्तुळाची त्रिज्या 5 सेमी आहे' किंवा 'रेख PQ ही वर्तुळाची त्रिज्या आहे' असे दोन्ही प्रकारचे वाक्यप्रयोग पुढे आपणास करावे लागतील. या दोनपैकी कोणता अर्थ केव्हा विचारात घ्यावयाचा हे संदर्भावरून सांगता येते. जेव्हा आपण 'वर्तुळाची त्रिज्या 5 सेमी आहे' असे म्हणतो तेव्हा त्याचा अर्थ $l(PQ) = 5$ असा होतो.

वर्तुळामुळे त्या प्रतलातील बिंदूंचे तीन भागात विभाजन होते. (i) वर्तुळावरील बिंदू, (ii) वर्तुळाच्या आतील भागातील बिंदू व (iii) वर्तुळाच्या बाहेरील भागातील बिंदू.

वर्तुळावरील प्रत्येक बिंदूचे केंद्रबिंदूपासूनचे अंतर त्या वर्तुळाच्या त्रिज्येइतके असते हे आपणास माहीत आहे. वर्तुळाच्या प्रतलातील एखादा बिंदू वर्तुळाच्या आत असेल तर त्याचे केंद्रबिंदूपासूनचे अंतर त्रिज्येपेक्षा कमी असेल की जास्त? वर्तुळाबाहेरील बिंदूच्या, केंद्रबिंदूपासूनच्या अंतराबद्दल काय सांगता येईल?

वर्तुळाचा अंतर्भाग : वर्तुळाच्या प्रतलातील ज्या बिंदूंचे वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूपासूनचे अंतर त्या वर्तुळाच्या त्रिज्येपेक्षा कमी आहे अशा सर्व बिंदूंचा संच म्हणजे वर्तुळाचा अंतर्भाग होय.

वर्तुळाचा बाह्यभाग : वर्तुळाच्या प्रतलातील ज्या बिंदूंचे वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूपासूनचे अंतर त्या वर्तुळाच्या त्रिज्येपेक्षा जास्त आहे अशा सर्व बिंदूंचा संच म्हणजे वर्तुळाचा बाह्यभाग होय.



आ. 1·3

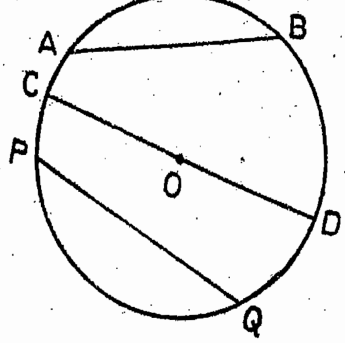
वर्तुळावरील बिंदू वर्तुळाच्या अंतर्भागात नसतात तसेच बाह्यभागातही नसतात. म्हणजेच एखादया वर्तुळाच्या प्रतलात असलेला कोणताही बिंदू एक तर वर्तुळाच्या अंतर्भागात असेल, वर्तुळाच्या बाह्यभागात असेल किंवा वर्तुळावर असेल.

वर्तुळाच्या व्याख्येनुसार वर्तुळाची त्रिज्या r ही नेहमी धन वास्तव संख्या असते. म्हणजेच $r > 0$ अथवा $0 < r$. साहजिकच, वर्तुळाचा केंद्रबिंदू वर्तुळाच्या अंतर्भागात असला पाहिजे.

[यापुढे, एखादा बिंदू वर्तुळाच्या अंतर्भागात असेल तर तो **वर्तुळाच्या आत** आहे आणि बाह्यभागात असेल तर तो **वर्तुळाच्या बाहेर** आहे, असे थोडक्यात म्हणू. एखादा बिंदू **वर्तुळावर** आहे. याचा अर्थ, तो ज्याला आपण वर्तुळ म्हणतो अशा बिंदूसंचाचा एक घटक आहे, असा होतो.]

वर्तुळाची जीवा : ज्या रेषाखंडाची दोन्ही टोके वर्तुळावर असतात त्या रेषाखंडाला त्या वर्तुळाची **जीवा** (Chord) म्हणतात. आ. 1·4 मध्ये रेख AB, रेख CD व रेख PQ वर्तुळाच्या जीवा आहेत. रेख AB ही जीवा आपण 'जीवा AB' असे लिहून दाखवू. बाजूच्या आकृतीत दाखवलेली जीवा CD पाहा. वर्तुळाचा केंद्रबिंदू O ह्या जीवेवर आहे. वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूतून जाणाऱ्या अशा जीवेला वर्तुळाचा **व्यास** (Diameter) म्हणतात.

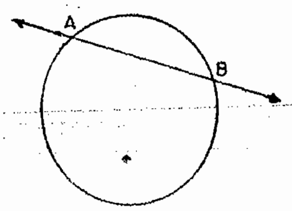
(वर्तुळाचे असे किती व्यास आपण काढू शकतो ?



आ. 1·4

वर्तुळाच्या व्यासाच्या व्याख्येवरून आपल्या सहज निदर्शनाला येते की व्यासाची लांबी, त्या वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या दुप्पट असते. वर्तुळाची त्रिज्या r असेल तर वर्तुळाच्या व्यासाची लांबी $2r$ असते. वर्तुळाच्या त्रिज्येप्रमाणेच 'व्यास' हाही शब्द 'रेख CD हा वर्तुळाचा व्यास आहे' आणि 'वर्तुळाचा व्यास $2r$ आहे' अशा दोन्ही प्रकारे आपण वापरणार आहोत; पहिल्या बाबतीत 'रेषाखंड' या अर्थाने व दुसऱ्या बाबतीत 'अंतर दाखवणारी संख्या' या अर्थाने.

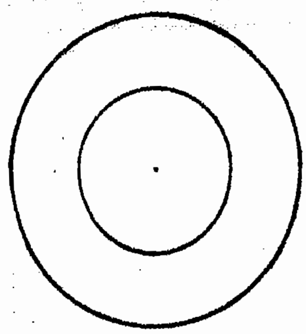
वर्तुळाची वृत्तछेदिका : वर्तुळाला दोन भिन्न बिंदूंत छेदणाऱ्या कोणत्याही रेषेला त्या वर्तुळाची **वृत्तछेदिका** (Secant) म्हणतात.



आ. 1·5

डाव्या बाजूच्या आकृतीत **रेषा** AB, त्या वर्तुळाची वृत्तछेदिका आहे. म्हणजेच जीवेला सामावणारी प्रत्येक रेषा त्या वर्तुळाची वृत्तछेदिका असते. तसेच, प्रत्येक वृत्तछेदिकेत दिलेल्या वर्तुळाची एक जीवा सामावलेली असते.

एककेंद्री वर्तुळे : आकृती 1·6 मध्ये दाखवलेली दोन वर्तुळे पाहा. या दोन्ही वर्तुळांचे केंद्र एकच असून त्रिज्या मात्र वेगवेगळ्या आहेत. अशा वर्तुळांना **एककेंद्री वर्तुळे** (Concentric Circles) म्हणतात.

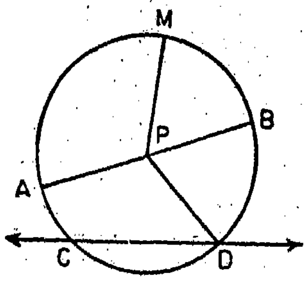


आ. 1·6

§ 1·3 प्रश्न :

1. रिकाम्या जागी योग्य शब्द भरून खालील विधाने पूर्ण करा.
   - (i) दिलेल्या प्रतलातील दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या अंतरावर असलेल्या त्या प्रतलातील बिंदूंच्या संचाला ________ म्हणतात.
   - (ii) वर्तुळाला ________ भिन्न बिंदूत छेदणाऱ्या रेषेला वर्तुळाची वृत्तछेदिका म्हणतात.
   - (iii) ज्याचा केंद्रबिंदू P आहे अशा वर्तुळाचा व्यास रेख AB आहे.
     - (a) म्हणून A आणि B हे दोन बिंदू ________ वर आहेत.
     - (b) रेख AB ची दोन्ही टोके वर्तुळावर असल्याने ती वर्तुळाची ________ देखील आहे.
     - (c) जर $l(AB)=d$ आणि $l(PA)=r$ असेल तर $d=$ ________

(iv) खालील आकृतीत P, वर्तुळाचा ______ आहे. रेख CD हा ______ आहे पण तो ______ नाही. कारण तो P मधून जात नाही. रेषा CD वर्तुळाची ______ आहे. रेख PA, रेख PB, रेख PM व रेख PD या वर्तुळाच्या ______ आहेत.



आ. 1·7

(v) P केंद्र असलेल्या एका वर्तुळाची त्रिज्या 4 सेमी आहे.

(a) A बिंदू असा आहे की l(PA)=5, तर A बिंदू वर्तुळाच्या ______ भागात असेल. कारण ______.

(b) B बिंदू वर्तुळाच्या अंतर्भागात असेल तर l(PB), 4 पेक्षा ______ राहील.

(c) जर C बिंदू असा असेल की l(PC)=4, तर रेख PC ही वर्तुळाची ______ असेल.

2. खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत असे तुम्हांस वाटते ?

(i) वर्तुळाचे सर्व व्यास त्याच्या जीवा असतात. (ii) वर्तुळाच्या सर्व जीवा त्याचे व्यास असतात. (iii) वर्तुळाच्या काही जीवा त्याचे व्यास असतात. (iv) वर्तुळाच्या काही जीवा त्याच्या त्रिज्या असतात. (v) जर d हा वर्तुळाचा व्यास असेल आणि r ही त्या वर्तुळाची त्रिज्या असेल, तर $d=2r$. (vi) वर्तुळाच्या त्रिज्येइतकी लांबी असलेली वर्तुळाची जीवा असू शकत नाही. (vii) दिलेल्या बिंदूपासून ठराविक अंतरावर असलेल्या सर्व बिंदूंचा संच म्हणजे वर्तुळ होय. (viii) वर्तुळाची वृत्तछेदिका म्हणजे त्या वर्तुळाच्या जीवेला सामावणारा रेषाखंड होय. (ix) दिलेल्या वर्तुळाला न छेदणारी रेषा त्या वर्तुळाच्या प्रतलात असू शकते. (x) एखादी रेषा वर्तुळाला एका बिंदूत छेदत असेल तर ती त्याला दुसऱ्या बिंदूत छेदते. (xi) वर्तुळाच्या दिलेल्या जीवेवर वर्तुळाचे फक्त दोनच बिंदू असतात. (xii) वर्तुळाचा केंद्रबिंदू व्यासाला दुभागतो. (xiii) वर्तुळाची वृत्तछेदिका वर्तुळाला एका बिंदूत छेदू शकते. (xiv) वर्तुळाच्या सर्व जीवा एकरूप असतात. (xv) वर्तुळाची जीवा त्या वर्तुळाच्या प्रतलात असते.

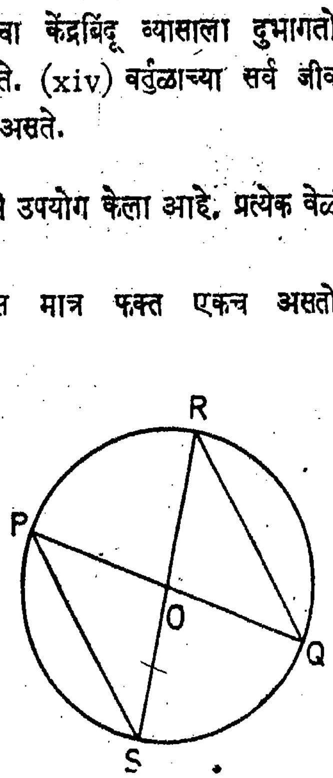
3. खालील वाक्यांमध्ये त्रिज्या आणि व्यास यांचा वेगवेगळया अर्थाने उपयोग केला आहे. प्रत्येक वेळी कोणत्या अर्थाने तो शब्द वापरला आहे ते सांगा.

(i) वर्तुळाला अनंत व्यास असले तरी त्या वर्तुळाचा व्यास मात्र फक्त एकच असतो.
(ii) दिलेली त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाला असंख्य त्रिज्या असतात.
(iii) वर्तुळाची त्रिज्या त्याच्या व्यासाच्या निम्मी असते.
(iv) वर्तुळाचा व्यास त्याच्या त्रिज्येच्या लांबीच्या दुप्पट असतो.
(v) व्यास म्हणजे वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूमधून जाणारी जीवा होय.
(vi) व्यास ही वर्तुळाची सर्वांत मोठी जीवा असते.

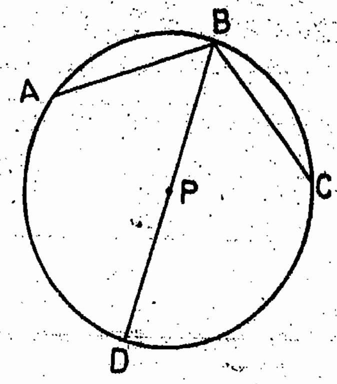
4. **पक्ष :** आ. 1·8 मध्ये रेख PQ व रेख RS हे वर्तुळाचे दोन व्यास आहेत.

साध्य : रेख PS ≅ रेख RQ व रेख PS ∥ रेख RQ

[**सूचना :** △ OPS व △ OQR एकरूप दाखवा.]



आ. 1·8

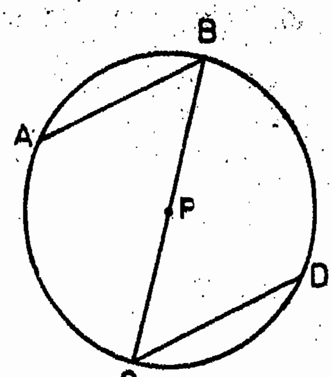


आ. 1·9

5. **पक्ष :** बाजूच्या आकृती 1·9 मधे P हा केंद्रबिंदू असलेल्या एका वर्तुळाचा व्यास रेख BD आहे. रेख AB ≅ रेख BC.

साध्य : $m\angle ABD = m\angle CBD$

[**सूचना :** $\triangle$ ABP व $\triangle$ CBP एकरूप दाखवा.]



आ. 1·10

6. **पक्ष :** P हा केंद्रबिंदू असलेल्या कोणत्याही वर्तुळात $m\angle ABC = m\angle DCB$ (आ. 1·10). रेख BC वर्तुळाचा व्यास आहे.

साध्य : रेख AB ≅ रेख CD.

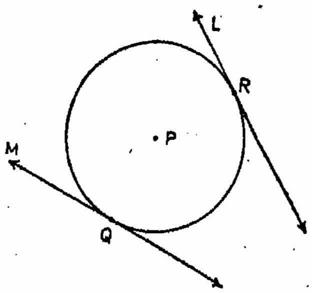
7. वर्तुळाचा व्यास, त्या वर्तुळाच्या कोणत्याही जीवेपेक्षा मोठा असतो हे सिद्ध करा. [**सूचना :** त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या लांबींची बेरीज तिसरीच्या लांबीपेक्षा जास्त असते हा गुणधर्म वापरा.]

8. खाली दिलेल्या विधानांपैकी जी सत्य असतील त्यांच्यापुढे √ खूण करा. जी विधाने सत्य नसतील अथवा निरर्थक असतील त्यांमधील ठळक शब्द बदलून सत्य विधाने तयार करा.

(i) एकाच वर्तुळाचे **सर्व** व्यास एकरूप असतात. (ii) **सर्व** वर्तुळांच्या त्रिज्या एकरूप असतात. (iii) **वर्तुळाची त्रिज्या** वर्तुळावरील सर्व बिंदूंपासून समदूर असते. (iv) वर्तुळाची त्रिज्या ही **रेषा** असते. (v) वर्तुळाचा व्यास म्हणजे वर्तुळाचा केंद्रबिंदू सामावणारी **जीवा** होय. (vi) एककेंद्री वर्तुळांचा केंद्रबिंदू **वेगवेगळा** असून त्रिज्या मात्र **तीच** असते.

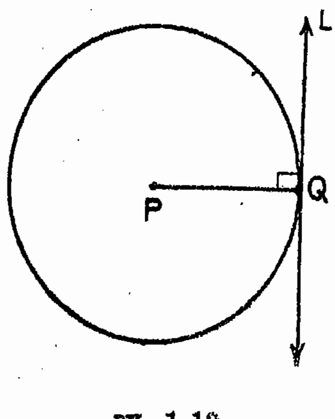
§ 1·4 वर्तुळाची स्पर्शिका

वर्तुळाची स्पर्शिका : वर्तुळाच्या प्रतलातील एखादी रेषा जर वर्तुळाला एकाच बिंदूत छेदत असेल (वर्तुळ व ती रेषा यांच्या छेदसंचात केवळ एकच बिंदू असेल) तर ती रेषा त्या वर्तुळाला त्या बिंदूत स्पर्श करते, किंवा ते वर्तुळ त्या रेषेला त्या बिंदूत स्पर्श करते असे म्हणतात. त्या रेषेला त्या वर्तुळाची **स्पर्शिका** (Tangent) आणि त्या बिंदूला **स्पर्शबिंदू** (Point of Contact) म्हणतात.



आ. 1·11

आ. 1·11 मध्ये रेषा L व रेषा M ह्या वर्तुळाच्या स्पर्शरेषा असून त्यांचे अनुक्रमे R व Q हे स्पर्शबिंदू आहेत.



आ. 1·12

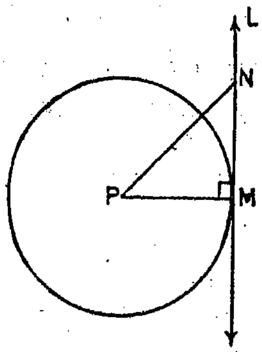
कोणत्याही त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. समजा त्याचा केंद्रबिंदू P आहे. या वर्तुळाची रेख PQ ही कोणतीही त्रिज्या काढा. रेख PQ शी

Q पाशी काटकोन करणारी रेषा L काढा. ही रेषा वर्तुळाला किती बिंदूंत छेदते ? ती त्या वर्तुळाची स्पर्शिका होते का ? आ. 1·12 पाहा.

खालील प्रमेय या प्रश्नांची उत्तरे देते.

§ 1·5 ▪ स्पर्शिकेचे प्रमेय :

वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या बाह्यटोकापासून त्रिज्येला काढलेली लंबरेषा त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते.



आ. 1·13

पक्ष : एका वर्तुळाचा P हा केंद्रबिंदू असून r ही त्रिज्या आहे. बिंदू M, त्रिज्या PM चे बाह्यटोक आहे. रेषा L ⊥ रेख PM.

साध्य : रेषा L वर्तुळाला M बिंदूत स्पर्श करते.

सिद्धता : रेषा L वर्तुळाला M बिंदूत स्पर्श करते हे सिद्ध करण्यासाठी त्या रेषेवरील M व्यतिरिक्त, कोणत्याही बिंदूचे P पासूनचे अंतर r नाही, हे सिद्ध करावे लागेल.

समजा बिंदू N हा, रेषा L वरील M व्यतिरिक्त दुसरा कोणताही बिंदू आहे.

∴ P पासून रेषा L पर्यंत रेख PM व रेख PN हे दोन रेषाखंड झाले.

लघुतम रेषाखंडाच्या पहिल्या प्रमेयानुसार, P पासून रेषा L पर्यंतच्या सर्व रेषाखंडांपैकी लंबरेषाखंड लघुतम असतो.

$\therefore l\,(PN) > l\,(PM)$

$\therefore l\,(PN) > r.$

म्हणजेच, रेषा L वरील N ह्या, M व्यतिरिक्त कोणत्याही बिंदूचे P पासूनचे अंतर r नाही हे सिद्ध झाले.

∴ रेषा L ही वर्तुळाची स्पर्शिका आहे.

वरील प्रमेयाचा व्यत्यास पुढे मांडला आहे.

§ 1·6 ▪ स्पर्शिकेच्या लंबतेचे प्रमेय :

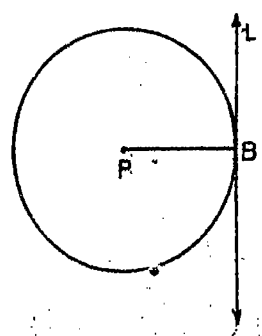
वर्तुळाची प्रत्येक स्पर्शिका स्पर्शबिंदूच्या ठिकाणी काढलेल्या त्रिज्येला लंब असते.

पक्ष : एका वर्तुळाचा P हा केंद्रबिंदू असून रेषा L ही स्पर्शिका वर्तुळाला B बिंदूत स्पर्श करते.

साध्य : स्पर्शिका L ⊥ त्रिज्या PB.

सिद्धता : समजा रेषा L, रेख PB ला लंब नाही. P पासून रेषा L वर रेख PM लंब टाका. या लंबाचा पाद M आहे असे समजा (आ. 1·15 पाहा).

किरण MB च्या विरुद्ध किरणावर C हा बिंदू असा घ्या की $l\,(MB) = l\,(MC)$.



आ. 1·14

आता △ PBM व △ PCM मधे,

रेख MB ≅ रेख MC..........................रचना

रेख PM ≅ रेख PM

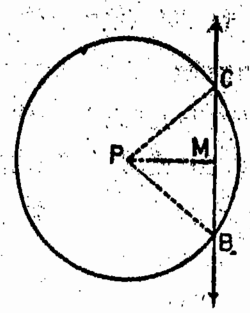
∠ PMB ≅ ∠ PMC...............प्रत्येकी काटकोन

∴ △ PBM ≅ △ PCM...........बाकोबा गृहीतक

∴ रेख PB ≅ रेख PC

∴ $l(PB) = l(PC)$

∴ C बिंदू वर्तुळावर आहे.



आ. 1·15

∴ रेषा L वर्तुळाला B व C ह्या दोन बिंदूंत छेदते.

पण रेषा L ही वर्तुळाची स्पर्शिका दिली असल्याने ती वर्तुळाला फक्त एकाच बिंदूत छेदते.

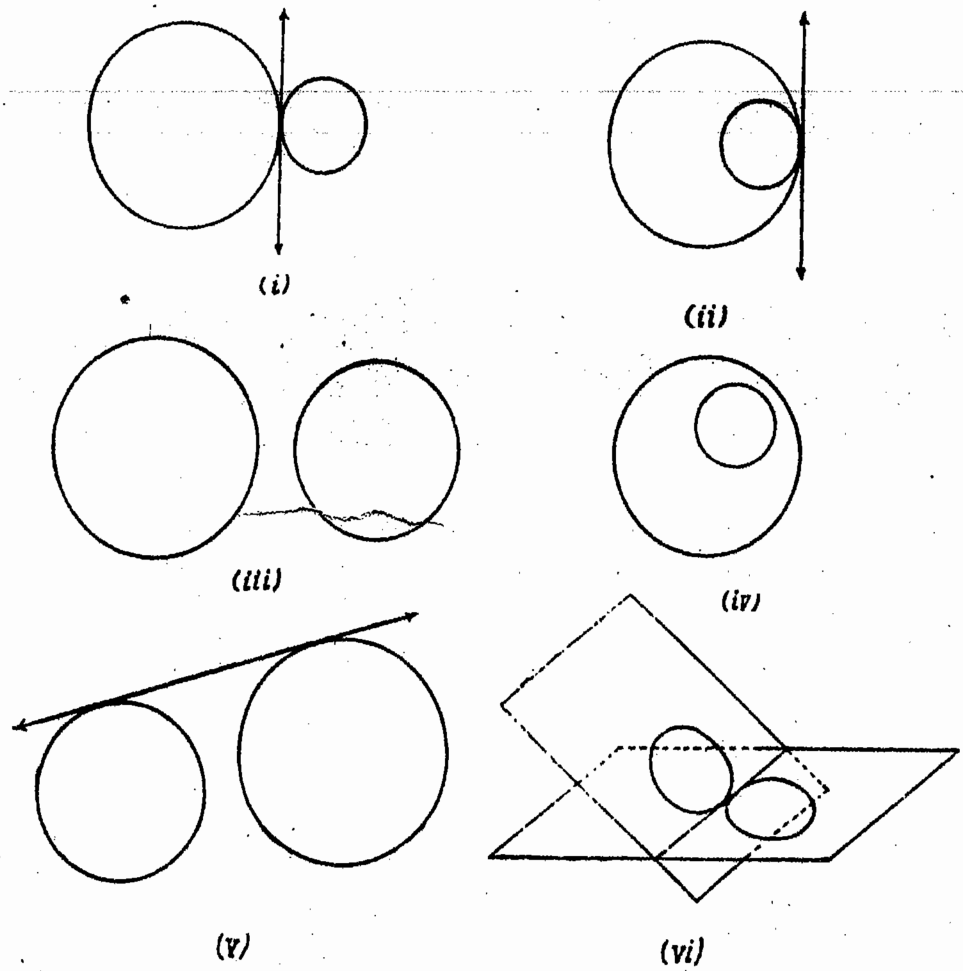
∴ रेषा L, रेख PB ला लंब नाही हे जे आपण गृहीत धरले होते ते असत्य आहे.

∴ रेषा L ⊥ रेख PB.

म्हणजेच स्पर्शिका L ⊥ त्रिज्या PB.

§ 1·7 स्पर्श वर्तुळे :

जर एकाच प्रतलातील दोन वर्तुळे एकाच रेषेला एकाच बिंदूत स्पर्श करीत असतील तर ती वर्तुळे



आ. 1·16

परस्परांना त्या बिंदूत स्पर्श करतात असे म्हणतात. ती रेषा त्या वर्तुळाची **समाईक स्पर्शिका** (Common Tangent) असते, असे म्हणतात.

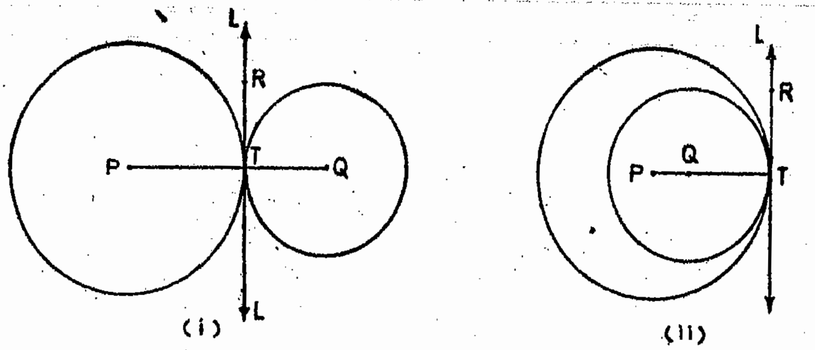
एकाच प्रतलातील परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचे केंद्रबिंदू, समाईक स्पर्शिकेच्या एकाच बाजूस असतील तर ती वर्तुळे परस्परांना **आतून** (Internally) स्पर्श करतात असे म्हणतात. अशा वर्तुळांना आपण अंतःस्पर्शी वर्तुळे म्हणतो. तसेच, एकाच प्रतलातील परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या व वर्तुळांचे केंद्रबिंदू, समाईक स्पर्शिकेच्या विरुद्ध बाजूस असतील तर ती वर्तुळे परस्परांना **बाहेरून** (Externally) स्पर्श करतात, असे म्हणतात. अशा वर्तुळांना आपण बाह्यस्पर्शी वर्तुळे म्हणतो.

आ. 1·16 मधील (i) मधे वर्तुळे बाहेरून स्पर्श करतात. आणि (ii) मधे ती आतून स्पर्श करतात. (iii), (iv) व (v) मधे ती आतून अथवा बाहेरूनही स्पर्श करीत नाहीत. कारण (iii) व (iv) मधे ती एकाच प्रतलात असली तरी त्यांना एकाच बिंदूत समाईक स्पर्शिका नाही. (v) मधे ती एकाच प्रतलात असून त्यांना समाईक स्पर्शिका असली तरी ती वर्तुळे त्या रेषेला एकाच बिंदूत स्पर्श करीत नाहीत आणि (vi) मधे ती समाईक स्पर्शिकेला एकाच बिंदूत स्पर्श करीत असली तरी ती एकाच प्रतलात नाहीत.

समान त्रिज्येची पण वेगवेगळी केंद्रे असलेली वर्तुळे फक्त बाहेरूनच स्पर्श करू शकतात. एकच केंद्र असलेली व समान त्रिज्या असलेली दोन वर्तुळे परस्परांना स्पर्श करतात असे आपण म्हणणार नाही. प्रत्यक्षतः ही दोन भिन्न वर्तुळे नसून ते एकच वर्तुळ आहे. वर्तुळ स्वतःलाच स्पर्श करते असे आपण म्हणत नाही.

§ 1·8 ▪ उपप्रमेय :

परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदू त्या वर्तुळांच्या केंद्रांतून जाणाऱ्या रेषेवर असतो.



आ. 1·17

पक्ष : परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांची अनुक्रमे P व Q ही केंद्रे आहेत असे समजा. ही दोन वर्तुळे परस्परांना समजा T मधे स्पर्श करतात. (आ. 1·17 (i) मधे ती बाहेरून व (ii) मधे आतून स्पर्श करतात.)

साध्य : T बिंदू रेषा PQ वर आहे.

सिद्धता : समजा दोन्ही वर्तुळांची, रेषा RT ही समाईक स्पर्शिका आहे.

∴ स्पर्शिकेच्या लंबतेच्या प्रमेयानुसार रेषा RT ला, T बिंदूतून (वर्तुळांच्या प्रतलात) एक व फक्त एकच लंब काढता येतो.

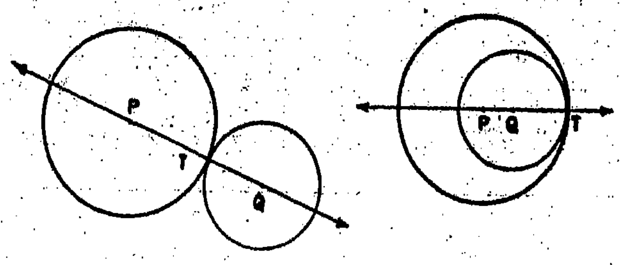
∴ रेख PT व रेख QT एकरेषीय असले पाहिजेत.

म्हणजेच P, T व Q हे बिंदू एकरेषीय आहेत.

∴ T बिंदू रेषा PQ वर आहे.

§ 1·9 तुम्ही आकृतींच्या सम्मितीचा अभ्यास केला आहे. आ. 1·18 मधे दाखविल्याप्रमाणे एक वर्तुळ काढून त्याचा कोणताही व्यास काढा. ते वर्तुळ व्यासाभोवती सम्मिताकार दिसते का ? मग वर्तुळाच्या सम्मितीचा अक्ष कोणता आहे ?

मागील उपप्रमेयात रेषा PQ भोवती दोन्ही वर्तुळांचे भाग सम्मित दिसतात का ते पाहा. या ठिकाणी सम्मिती अक्ष कोणता होईल ?

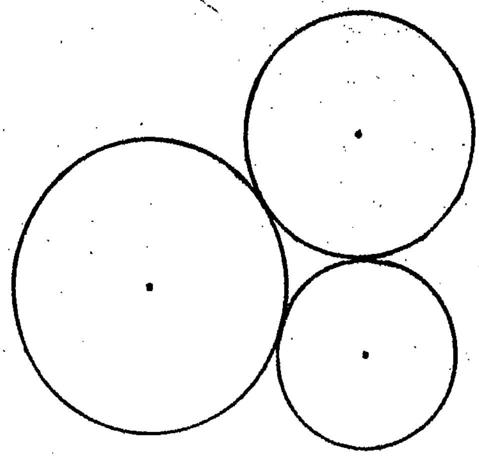


आ. 1·18

§ 1·10 प्रश्न :

1. वेगवेगळ्या त्रिज्यांची तीन वर्तुळे दिली असून त्यापैकी प्रत्येक वर्तुळ इतर दोन वर्तुळांना आतून अथवा बाहेरून स्पर्श करते. एक मांडणी बाजूच्या आकृतीत दाखवली आहे.

किती प्रकारे अशी मांडणी आपण करू शकतो ? सर्व पर्यायी मांडणींची चित्रे रेखाटा.



आ. 1·19

2. खालील विधानांत काही जागा रिकाम्या सोडल्या आहेत. रिकाम्या जागी योग्य शब्द अथवा शब्द-समूह भरून विधाने सत्य करा.

(i) एका वर्तुळाचा O हा केंद्रबिंदू असून रेख OQ ही त्याची त्रिज्या आहे. तर Q बिंदू ———वर राहील. (ii) परस्परांना बाहेरून स्पर्श करीत असलेल्या दोन वर्तुळांचे P व Q हे अनुक्रमे केंद्रबिंदू आहेत. तर Q बिंदू, P केंद्रबिंदू असलेल्या वर्तुळाच्या———भागात आहे. (iii) दोन वर्तुळांचे केंद्रबिंदू अनुक्रमे P व Q असून त्यांच्या त्रिज्या अनुक्रमे p व q आहेत. जर $p=q$ असेल तर ती वर्तुळे परस्परांना फक्त———(आतून बाहेरून) स्पर्श करू शकतात. (iv) ज्याचा केंद्रबिंदू O आहे अशा वर्तुळाची रेख OQ त्रिज्या आहे. जर रेषा QP, रेख OQ ला लंब असेल तर रेषा QP, त्या वर्तुळाची———आहे. (v) वर्तुळाच्या स्पर्शिके-वरील, स्पर्शबिंदू सोडून, इतर सर्व बिंदू वर्तुळाच्या———असतात.

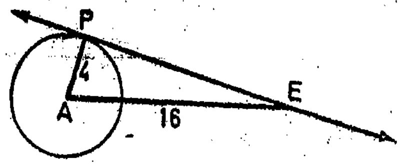
3. खालील प्रश्नांची उत्तरे दया.

(i) एका वर्तुळाचा केंद्रबिंदू दिला असून वर्तुळावरील एक बिंदू दिला आहे. वर्तुळावरील हा बिंदू स्पर्शबिंदू होईल अशी स्पर्शिका कशी काढाल ? (ii) वर्तुळाच्या बाह्यभागात M हा बिंदू आहे. त्या वर्तुळाच्या किती स्पर्शिकांवर हा बिंदू असेल ? (iii) एका वर्तुळाचा A हा केंद्रबिंदू असून रेषा L ही त्या वर्तुळाची B पाशी स्पर्शिका आहे. रेषा L वर C हा बिंदू असा आहे की, $l(AC)=25$, $l(BC)=24$ तर त्या वर्तुळाची त्रिज्या किती ?

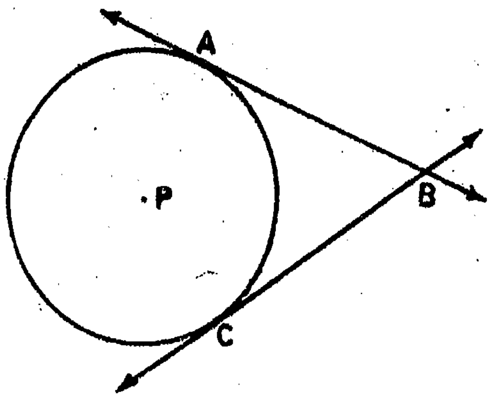
4. अवकाशातील कोणत्याही दोन वर्तुळांचे केंद्रबिंदू अनुक्रमे A व B असून त्यांच्या त्रिज्या अनुक्रमे r व s आहेत. ही दोन्ही वर्तुळे L रेषेला T बिंदूत स्पर्श करतात. तर पुढीलपैकी कोणती विधाने सत्य होतील ?

(i) रेख AB, रेषा L ला छेदते. (ii) रेषा AB, रेषा L ला छेदते. (iii) जर T बिन्दू रेख AB वर असेल तर दोन्ही वर्तुळे एकप्रतलीय असली पाहिजेत. (iv) जर T बिंदू रेख AB वर नसेल तर दोन्ही वर्तुळे एकप्रतलीय नसली पाहिजेत. (v) जर $d(A,B) > d(A,T)$ आणि वर्तुळे एकप्रतलीय असतील तर ती परस्परांना बाहेरून स्पर्श करतात. (vi) जर $d(B,T) > d(A,B) > d(A,T)$ आणि वर्तुळे एकप्रतलीय असतील तर ती परस्परांना आतून स्पर्श करतात. (vii) बिंदू A आणि रेषा L यांनी निश्चित केलेल्या प्रतलातच B बिंदू असेल.

5. वर्तुळाच्या केंद्रबिंदू A असून त्याची त्रिज्या 4 आहे. $d(A,E) = 16$ असून रेषा EP, वर्तुळाला P ह्या ठिकाणी स्पर्शिका आहे (आ. 1·20). तर $d(P,E)$ ची किंमत काढा.



आ. 1·20

6. 

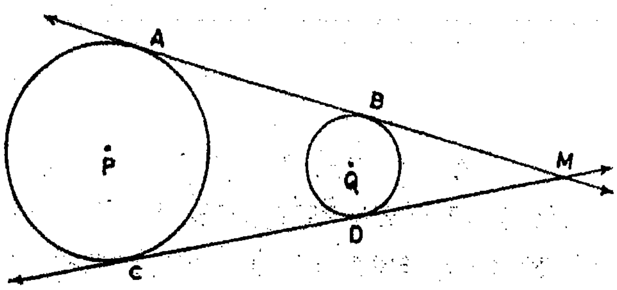
आ. 1·21

पक्ष : एका वर्तुळाचा P हा केंद्रबिंदू असून त्या वर्तुळाच्या A व C बिंदूंतील स्पर्शिका परस्परांना B मध्ये छेदतात (आ. 1·21).

साध्य : रेख AB ≅ रेख CB

(सूचना : △PAB व △PCB एकरूप दाखवा.)

7. पक्ष : कोणत्याही दोन असमान त्रिज्यांच्या वर्तुळांचे, अनुक्रमे P व Q हे केंद्रबिंदू असून रेषा AM व रेषा CM या त्यांच्या स्पर्शिका M मध्ये छेदतात (आ. 1·22). A, B आणि C, D हे अनुक्रमे स्पर्शबिंदू आहेत.



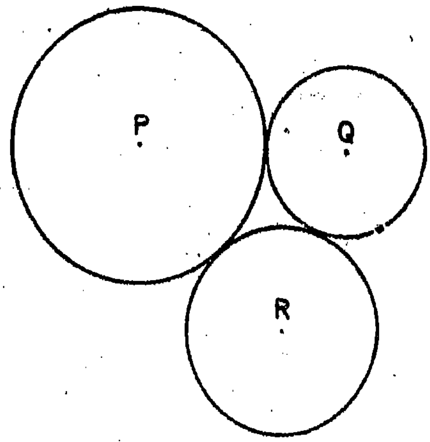
आ. 1·22

साध्य : रेख AB ≅ रेख CD.

(सूचना : उदा॰ 6 चा आधार घ्या.)

8. आकृती 1·23 मधे दाखवल्याप्रमाणे P, Q, R हे अनुक्रमे तीन वर्तुळांचे केंद्रबिंदू असून प्रत्येक वर्तुळ इतर दोन वर्तुळांना बाहेरून स्पर्श करते. जर $d(P,Q) = 28$, $d(Q,R) = 20$ व $d(P,R) = 36$ असेल तर प्रत्येक वर्तुळाची त्रिज्या किती ?

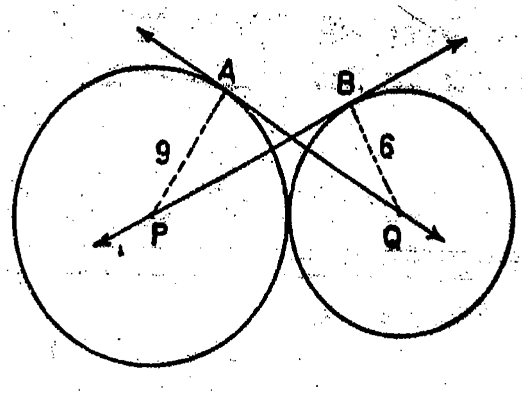
(कोणत्याही एका वर्तुळाची त्रिज्या x समजा.)



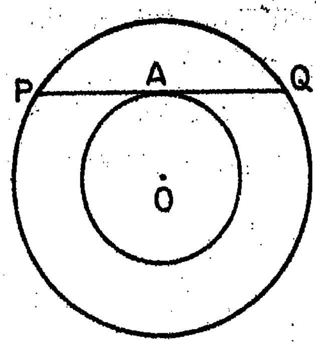
आ. 1·23

9. परस्परांना बाहेरून स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांच्या दोन केंद्रबिंदूंमधील अंतर त्यांच्या त्रिज्यांच्या बेरजेइतके असते, हे सिद्ध करा.

10. परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 9 व 6 असून त्यांचे केंद्रबिंदू अनुक्रमे P व Q आहेत (आ. 1·24). रेषा AQ व रेषा PB त्या वर्तुळांच्या अनुक्रमे A व B मधे स्पर्शिका आहेत. तर $d(P, B) = ?$ आणि $d(Q, A) = ?$



आ. 1·24



आ. 1·25

11. **पक्ष** : दोन एककेंद्री वर्तुळांचा केंद्रबिंदू O असून रेख PQ ही मोठ्या वर्तुळाची जीवा लहान वर्तुळाला A बिंदूत स्पर्श करते (आ. 1·25).

साध्य : स्पर्शबिंदू A रेख PQ ला दुभागतो.

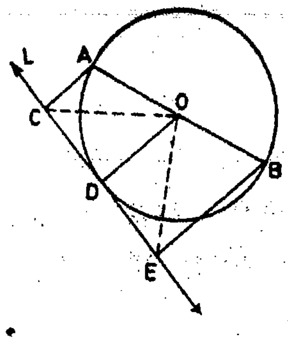
(**सूचना** : रेख OP, रेख OQ व रेख OA काढा.)

12. वर्तुळाच्या व्यासाच्या टोकांशी वर्तुळाला स्पर्श करणाऱ्या स्पर्शिका परस्परांना समांतर असतात, हे सिद्ध करा.

13. **पक्ष** : वर्तुळाचा केंद्रबिंदू O असून रेख AB हा व्यास आहे. रेषा L ही वर्तुळाची D बिंदूत स्पर्शिका आहे. रेख AC व रेख BE, L रेषेवर लंब आहेत.

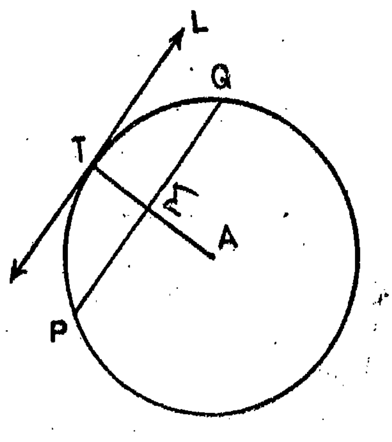
साध्य : रेख OC ≅ रेख OE.

(**सूचना** : रेख OD, रेख AC, व रेख BE समांतर दाखवा.)



आ. 1·26

14. आ. 1·27 मधे A हा वर्तुळाचा केंद्र असून रेषा L ही स्पर्शिका त्या वर्तुळाला T बिंदूत स्पर्श करते. रेख PQ ही जीवा L रेषेला समांतर असून रेख AT च्या मध्यबिंदूतून जाते. $l(PQ) = 12$ असेल तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा.



आ. 1·27

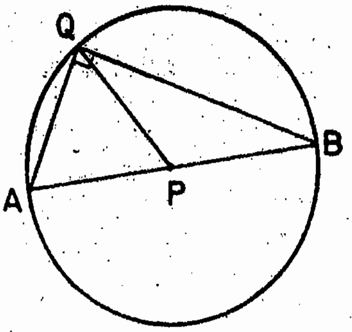
15. **पक्ष** : समजा, एका वर्तुळाचा P हा केंद्रबिंदू असून रेख AB हा व्यास आहे. रेख AC त्याची एक जीवा आहे. P मधून जाणारी व रेख AC ला समांतर असलेली वृत्तछेदिका वर्तुळाच्या C बिंदूतील स्पर्शिकेला D बिंदूत मिळते.

साध्य : रेषा DB ही त्या वर्तुळाची B बिंदूत स्पर्शिका आहे.

(सूचना : रेख PC काढा.)

16. पक्ष : समजा, एका वर्तुळाचा P हा केंद्रबिंदू आहे. रेख AB व्यास असून रेख PQ ही एक त्रिज्या आहे (आ. 1·28).

साध्य : $m\angle AQB = 90$



आ. 1·28

§ 1·11 कोणत्याही त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. त्या वर्तुळाची रेख AB ही कोणतीही जीवा घ्या. वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूपासून जीवेवर लंब टाका. समजा, हा लंब जीवेला D बिंदूत छेदतो. $d(A, D)$ व $d(B, D)$ यांच्यामधे काय संबंध आढळतो? या संबंधावरून आपणास D बिंदूबद्दल काय सांगता येईल?

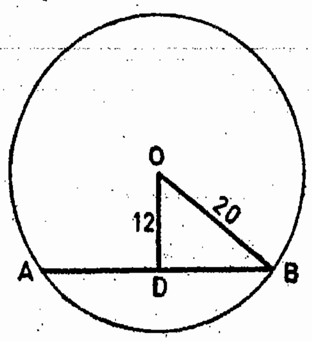
वर केलेल्या कृतीचा निष्कर्ष खाली प्रमेयाच्या रूपात मांडला आहे.

■ प्रमेय :

वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूतून जीवेवर काढलेला लंब जीवेस दुभागतो.

ह्या प्रमेयाची सिद्धता पाहण्यापूर्वी हा गुणधर्म उदाहरणाद्वारे प्रथम समजावून घेऊ.

§ 1·12 **उदाहरण** : एका वर्तुळाची त्रिज्या 20 सेमी असून त्याची एक जीवा केंद्रापासून 12 सेमी अंतरावर आहे. तर त्या जीवेची लांबी किती?



आ. 1·29

उत्तर : खाली उदाहरणाचे विश्लेषण करून दाखवले आहे. त्याच्या अनुरोधाने उत्तर तयार करा.

1. जीवेची पूर्ण लांबी काढण्यासाठी तिची अर्धी लांबी माहीत झाली की पुरे.
2. l(DB) ही जीवेची अर्धी लांबी होईल (वरील प्रमेयानुसार).
3. रेख OD ⊥ रेख DB असल्याने △ ODB हा कोणता त्रिकोण होतो?
4. या त्रिकोणाच्या दोन बाजू माहीत आहेत. रेख DB या तिसऱ्या बाजूची लांबी काढण्यासाठी कोणते प्रमेय वापराल?
5. रेख DB ची लांबी मिळाल्यावर पूर्ण जीवेची लांबी कशी काढाल?

जर तुम्ही वरील प्रश्नांची योग्य उत्तरे दयाल तर तुम्ही जवळजवळ सिद्धता पूर्ण केली असे होईल. आता रिकाम्या जागेत योग्य शब्द भरून खालील प्रयोगाची सिद्धता पूर्ण करा.

§ 1·13 ■ प्रमेय :

वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूतून वर्तुळाच्या जीवेवर काढलेला लंब त्या जीवेस दुभागतो.

पक्ष : आकृतीत वर्तुळाचा —— C असून रेख AB ही —— आहे.
रेख —— ⊥ रेख AB (पुढील पानावरील आ. 1·30 पाहा).

साध्य : —— ≅ ——

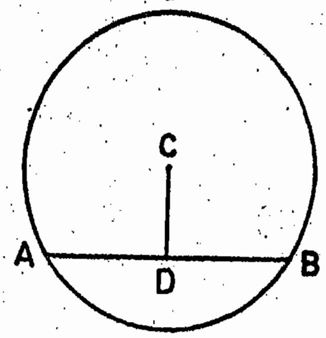
सिद्धता : △ ADC व △ BDC या —— त्रिकोणांत,

—— ≅ ——

आणि —— ≅ ——

∴ △ ADC ≅ △ BDC ... प्रमेय ——

∴ —— ≅ ——



आ. 1·30

याच प्रमेयाची दुसरी सिद्धता खालीलप्रमाणे देता येईल.

C हा बिंदू वर्तुळाचा केंद्रबिंदू असल्याने तो रेख AB च्या A आणि B या टोकांपासून समदूर आहे.

म्हणून C बिंदू रेख AB च्या लंबदुभाजकावर असला पाहिजे.

तसेच, रेख CD ⊥ रेख AB.

∴ D बिंदूदेखील रेख AB च्या लंबदुभाजकावर असला पाहिजे.

∴ D बिंदू, रेख AB ला दुभागतो.

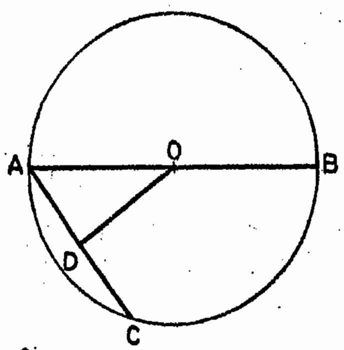
§ 1·14 वरील प्रमेयाचा व्यत्यासदेखील सत्य आहे. तो खालीलप्रमाणे मांडता येईल.

■ **व्यत्यास :**

वर्तुळाचा केंद्र व जीवेचा मध्य यांना जोडणारा रेषाखंड जीवेला लंब असतो.

या व्यत्यासाची सिद्धता देण्यापूर्वी या गुणधर्माचा उपयोग करून खालील उदाहरण कसे सोडवले आहे ते पाहा.

उदाहरण : रेख AB एका वर्तुळाचा व्यास असून रेख AC त्याची जीवा आहे. $l(AB)=40$ व $l(AC)=24$ असेल तर रेख AC ही जीवा वर्तुळमध्यापासून म्हणजे केंद्रापासून किती अंतरावर आहे?



आ. 1·31

उत्तर : रेख AC चा मध्यबिंदू D आणि वर्तुळाचा केन्द्रबिंदू O यांना जोडणारा रेख OD काढा.

वरील व्यत्यासाच्या आधारे रेख OD ⊥ रेख AC दाखवता येतो का?

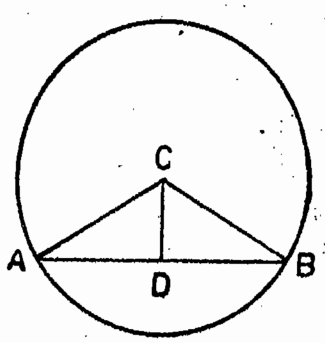
मग △ ADO हा कोणता त्रिकोण होईल?

आताच सिद्ध केलेल्या (§ 1·13) प्रमेयाचा व पायथॅगोरसच्या प्रमेयाचा उपयोग करून $d(O,D)$ कसे काढाल? आता या व्यत्यासाची सिद्धता पाहू.

पक्ष : आ. 1·32 मधे वर्तुळाचा C हा केंद्रबिंदू असून रेख AB ही त्याची जीवा आहे. D हा जीवेचा मध्यबिंदू आहे.

साध्य : रेख CD ⊥ रेख AB.

वरील प्रमेयाची सिद्धता तीन प्रकारांनी कशी देता येते हे पुढे सांगितले आहे.



आ. 1·32

सिद्धता 1 : D हा रेख AB चा मध्यबिंदू असल्याने तो A आणि B पासून समदूर आहे.

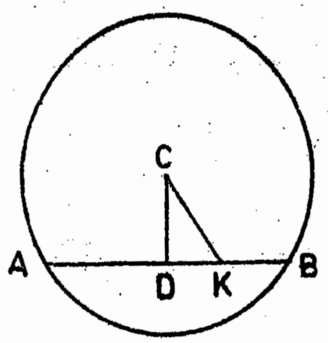
तसेच केंद्रबिंदू C हाही A आणि B पासून समदूर आहे.

∴ C व D हे दोन्ही बिंदू त्याच प्रतलातील रेख AB च्या टोकांपासून समदूर आहेत.

∴ लंबदुभाजकाच्या प्रमेयानुसार C व D हे बिंदू रेख AB च्या त्या प्रतलातील लंब-दुभाजकावर आहेत.

∴ रेख CD ⊥ रेख AB.

सिद्धता 2 : या सिद्धतेमध्ये § 1·13 मध्ये सिद्ध केलेल्या प्रमेयाचा आधार कसा घेतला आहे ते लक्षात घ्या.



आ. 1·33

रेख CD हा रेख AB ला लंब नाही असे समजा.
रेख CK ⊥ रेख AB काढा.
§ 1·13 मधे सिद्ध केलेल्या प्रमेयानुसार K हा, रेख AB चा मध्य बिंदू होईल.
पण आपल्याला D हा, रेख AB चा मध्यबिंदू दिला आहे.
∴ रेख AB चे D व K हे दोन मध्यबिंदू झाले. परंतु 'रेषाखंडाला एकमेव मध्यबिंदू असतो' या प्रमेयाशी हे विसंगत आहे.

∴ रेख CD हा, रेख AB ला लंब नाही हे असत्य आहे.

∴ रेख CD ⊥ रेख AB.

सिद्धता 3 : प्रश्नांची उत्तरे देऊन सिद्धता पूर्ण करा.

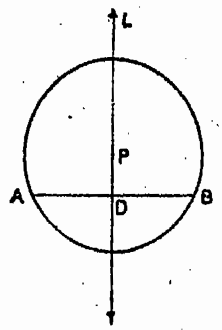
1. △ACD व △BCD हे एकरूप कसे दाखवाल ?
2. त्यासाठी कोणत्या गृहीतकाचा आधार घ्याल ?
3. ह्या त्रिकोणांच्या एकरूपतेमुळे कोणते कोन एकरूप दाखवता आले ?
4. त्यांपैकी कोणते कोन पूरक आहेत ?
5. यावरून कोणता निष्कर्ष काढता आला ?

[टीप : § 1·13 मधील प्रमेय व त्याचा व्यत्यास यात विशद केलेल्या जीवा ह्या, त्या वर्तुळाचा व्यास नसाव्यात. कारण त्या प्रमेयात सांगितलेली जीवा जर व्यास असेल तर सिद्धतेमधे दाखवलेले दोन त्रिकोण अस्तित्वात येणार नाहीत. हीच गोष्ट व्यत्यासाच्या बाबतीतही सांगता येईल. तरीपण प्रमेयातील गुणधर्म सामान्यतः खरा ठरतो.]

इथेही आपणास L रेषेभोवती वर्तुळाची सम्मिती प्रस्थापित करता येईल काय ? वर्तुळाच्या केंद्रातून जाणाऱ्या रेषेला लंब असलेल्या सर्व जीवांच्या बाबतीत हे सांगता येईल काय ?

§ 1·15 ▪ उपप्रमेय 1 :

वर्तुळाच्या जीवेचा, वर्तुळाच्या प्रतलातील लंबदुभाजक वर्तुळकेंद्रातून जातो.



आ. 1·34

लंबदुभाजकाच्या प्रमेयाचा अधार घेऊन या उपप्रमेयाची सिद्धता तुम्ही स्वतः लिहा.

§ 1·16 ▪ उपप्रमेय 2 :

वर्तुळाचे कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नसतात.

या उपप्रमेयाच्या सिद्धतेसाठी अप्रत्यक्ष पद्धती वापरू.

जर Q, R, S हे वर्तुळावरील तीन बिंदू एकरेषीय असते तर रेख QR व रेख RS या जीवांचे लंबदुभाजक समांतर झाले असते. पण हे अशक्य आहे. कारण उपप्रमेय 1 नुसार हे दोन्ही लंबदुभाजक वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूतून जातात.

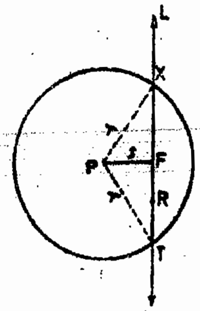
या उपप्रमेयाचे विधान खालीलप्रमाणे देखील लिहिता येईल काय ?

एक वर्तुळ व एक रेषा जास्तीत जास्त दोन बिंदूंत छेदू शकतात.

§ 1·17 ▪ उपप्रमेय 3 :

जर एखादी रेषा वर्तुळाच्या अंतर्भागास छेदत असेल तर वर्तुळ व ती रेषा यांच्या छेदसंचात दोन व दोनच बिंदू असतात.

पक्ष : P हा दिलेल्या वर्तुळाचा केंद्रबिंदू असून r ही त्याची त्रिज्या आहे. वर्तुळाच्या अंतर्भागात R हा बिंदू असून तो रेषा L वर आहे (आ. 1·35).



आ. 1·35

साध्य : रेषा L ही वर्तुळाला दोन व दोनच बिंदूंत छेदते.

सिद्धता : R हा बिंदू वर्तुळाच्या अंतर्भागात असल्यामुळे $l(PR) < r$.

समजा, P पासून रेषा L वर टाकलेल्या लंबाचा पाद F आहे. व $l(PF) = s$.

यात दोन पर्याय संभवतात. (i) $F = R$ आणि (ii) $F \neq R$.

(i) जर $F = R$ असेल तर R हा वर्तुळाच्या अंतर्भागात दिलेला असल्याने F बिंदूदेखील वर्तुळाच्या अंतर्भागातच राहील.

(ii) जर $F \neq R$ तर रेख PF हा लंबरेषाखंड असल्यामुळे $l(PF) < l(PR) < r$.

$$\therefore s < r.$$

म्हणून F बिंदू वर्तुळाच्या अंतर्भागात राहील.

आता समजा, रेषा L वर्तुळाला X बिंदूत छेदते. △PFX हा काटकोन त्रिकोण आहे. अशा तऱ्हेने F हा नेहमीच वर्तुळाच्या अंतर्भागात असेल.

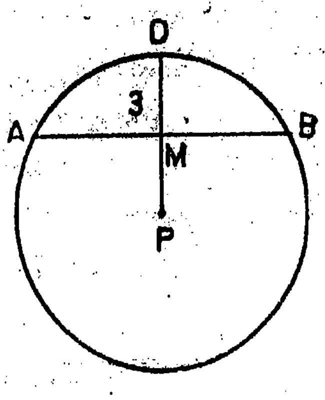
जर दिलेली रेषा वर्तुळकेंद्रातून जात असेल तर ती वर्तुळाच्या व्यासाला सामावते, आणि बिंदूस्थापनेच्या प्रमेयानुसार, रेषा L वर P पासून r इतक्या अंतरावर दोन बिंदू आहेत. हे दोन बिंदू वर्तुळावर असणार हे उघड आहे व म्हणून प्रमेय सिद्ध होते. आता दिलेली रेषा वर्तुळ केंद्रातून जात नाही असे आपण समजू या.

या प्रमेयाची सिद्धता देताना आपल्याला दोन गोष्टी प्रस्थापित कराव्या लागतील.

(i) दिलेली रेषा वर्तुळाला छेदते.

(ii) त्यांना समाईक असे नेमके दोनच बिंदू आहेत.

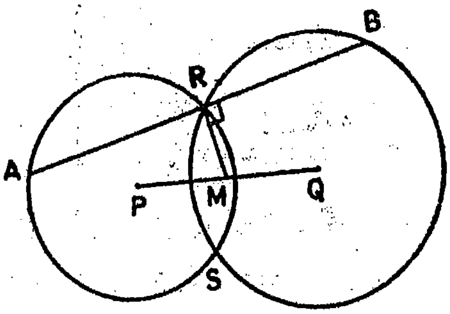
6. P हा केंद्र असलेल्या एका वर्तुळाची जीवा AB त्याच्या त्रिज्या PD ला M मध्ये लंब आहे. $l(AB)=18$ व $l(MD)=3$ (आ. 1·38). तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा.



आ. 1·38

7. वर्तुळाचा व्यास नसलेल्या दोन एकरूप जीवा त्या वर्तुळाच्या व्यासावर छेदत असतील तर त्या जीवा त्या व्यासाशी एकरूप कोन निश्चित करतात हे सिद्ध करा.

8. पक्ष : आ. 1·39 मध्ये दाखवलेली अनुक्रमे P आणि Q केंद्रे असलेली दोन वर्तुळे R व S मधे छेदतात. बिंदू M, रेख PQ चा मध्यबिंदू आहे. रेख AB, रेख MR ला R मध्ये लंब आहे.



आ. 1·39

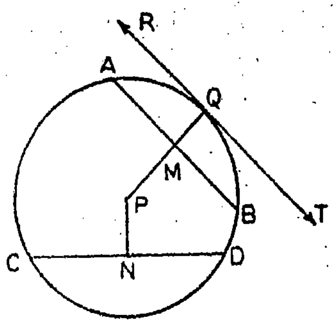
साध्य : रेख AR ≅ रेख BR

9. कोणत्याही तीन नैकरेषीय बिंदूतून एक वर्तुळ जाते हे सिद्ध करा.

(सूचना : वर्तुळाचा केंद्र, जीवेच्या टोकापासून समदूर असतो, या गुणधर्माचा उपयोग करा.)

10. जर दोन एकरूप वर्तुळे परस्परांना बाहेरून स्पर्श करीत असतील तर त्यांच्या केंद्रबिंदूपासून समान अंतरावर असलेला त्या प्रतलावील कोणताही बिंदू त्यांच्या समाईक स्पर्शरेषेवर असतो हे सिद्ध करा.

11.



आ. 1·40

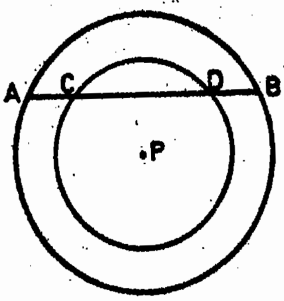
आ. 1·40 ला अनुसरून काही विधाने खाली दिली आहेत. प्रत्येक विधानाला पुष्टी देणारे प्रमेय अथवा उपप्रमेय लिहा.
(i) जर रेख PN ⊥ रेख CD तर, $l(CN)=l(ND)$. (ii) A, Q आणि B हे नैकरेषीय बिंदू आहेत. (iii) जर $d(P,M)=d(P,N)$, रेख PM ⊥ रेख AB आणि रेख PN ⊥ रेख CD तर, रेख AB ≅ रेख CD. (iv) जर रेषा RT ही स्पर्शिका असेल तर, रेषा RT ⊥ रेख PQ. (v) जर M हा वर्तुळाच्या अंतर्भागात असेल व Q हा वर्तुळावर असेल तर रेषा MQ, वर्तुळाला Q व्यतिरिक्त आणखी फक्त एकाच बिंदूत छेदते. (vi) जर रेख AB ≅ रेख CD, रेख PM ⊥ रेख AB आणि रेख PN ⊥ रेख CD तर $l(PM)=l(PN)$.

12. पुढे काही विधाने दिली आहेत, ती सत्य आहेत की असत्य आहेत ते सांगा. असत्य विधाने सत्य होण्यासाठी ठळक अक्षरांतील शब्दांऐवजी योग्य शब्द वापरा.

(i) वर्तुळातील समांतर जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समदूर असतात. (ii) वर्तुळकेंद्रातून जाणारी आणि (व्यास नसलेल्या) जीवेला दुभागणारी रेषा त्या जीवेला लंब असते. (iii) वर्तुळकेंद्रापासून समदूर असलेल्या सर्व जीवा परस्परांशी समांतर असतात. (iv) वर्तुळाच्या जीवेला दुभागणारी रेषा नेहमीच वर्तुळाच्या केंद्रातून जाते. (v) दोन समांतर जीवांपैकी एका जीवेला लंब असलेला व्यास दुसऱ्या जीवेला लंब असतो. (vi) वर्तुळात काढलेल्या स्पर्शिकेच्या स्पर्शबिंदूतून काढलेला व्यास त्या व्यासाला समांतर असलेल्या सर्व जीवांना दुभागतो. (vii) वर्तुळकेंद्रापासून जीवेवर काढलेला लंब जीवेला दुभागतो. (viii) वर्तुळकेंद्रातून जाणारी व वर्तुळाच्या स्पर्शिकेला लंब असणारी रेषा स्पर्शबिंदूतून जाते.

13. **पक्ष** : दोन एककेंद्री वर्तुळांचा केंद्र P आहे. मोठ्या वर्तुळाची जीवा AB, लहान वर्तुळाला C व D मधे छेदते.

साध्य : रेख AC $\cong$ रेख DB.



आ. 1·41

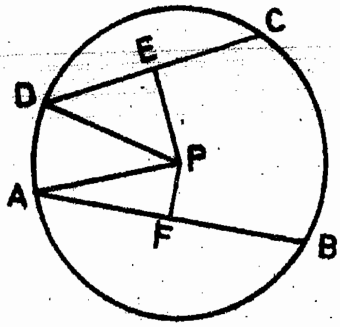
14. एका वर्तुळाच्या परस्परांना छेदणाऱ्या जीवा जर एकरूप असतील तर छेदनबिंदूमुळे एका जीवेचे होणारे भाग हे दुसऱ्या जीवेच्या होणाऱ्या भागांशी एकरूप असतात, हे सिद्ध करा.

15. वर्तुळाच्या दोन जीवा असमान लांबीच्या असतील तर जी जीवा मोठी असते ती लहान जीवेपेक्षा वर्तुळमध्याच्या जास्त जवळ असते, हे सिद्ध करा.

पक्ष : वर्तुळाचा P हा केंद्रबिंदू असून रेख AB व रेख CD त्या वर्तुळाच्या जीवा आहेत. तसेच, $l(AB) > l(CD)$, रेख PE $\perp$ रेख DC आणि रेख PF $\perp$ रेख AB.

साध्य : $l(PF) < l(PE)$

सिद्धता : समजा, $l(AB) = a$, $l(CD) = b$, $l(PF) = c$, $l(PE) = d$ आणि त्रिज्या $= r$



आ. 1·42

विधाने	कारणे
1. $a > b$	1. पक्ष
2. $l(AF) = \frac{a}{2}$	2. रेख PF $\perp$ रेख AB
3. $l(DE) = \frac{b}{2}$	3. रेख PE $\perp$ रेख CD
4. $\therefore l(AF) > l(DE)$ i. e. $\frac{a}{2} > \frac{b}{2}$	4. 1, 2, 3 वरून
5. $\triangle$ AFP व $\triangle$ DEP, काटकोन त्रिकोण आहेत.	5. पक्ष

विधाने	कारणे
6. $\therefore r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2$	6. पायथॅगोरसचे प्रमेय
7. तसेच, $r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + d^2$	7. „
8. $\therefore \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + d^2$	8. 6 व 7 वरून
9. परंतु $\left(\frac{a}{2}\right)^2 > \left(\frac{b}{2}\right)^2$	9. विधान 4
10. $\therefore c^2 < d^2$	10. विधान 8 व 9
11. $\therefore c < d$	11. विधान 10.
12. $\therefore l(\text{PF}) < l(\text{PE})$	

16. एकाच वर्तुळाच्या दोन जीवा असमान लांबीच्या असतील तर जी जीवा वर्तुळकेंद्राच्या जास्त जवळ असते ती मोठी असते हे सिद्ध करा.

(**सूचना** : उदा॰ 15 चा आधार घेऊन किंवा अप्रत्यक्ष सिद्धतेचा वापर करून सोडवून पाहा.)

17. दिलेल्या वर्तुळातील समान लांबीच्या जीवांच्या मध्यबिंदूंचा संच एक वर्तुळ असते, हे सिद्ध करा.

18. खाली दिलेल्या आकृती 1·43 मधे वर्तुळाचा केंद्रबिंदू P असून रेख KT ⊥ रेख RS आहे. बाजूला काही माहिती दिली असून प्रत्येक वेळी एक प्रश्न विचारला आहे. प्रत्येक उदाहरणाकरता खाली दिलेल्या सूचना पाळा.

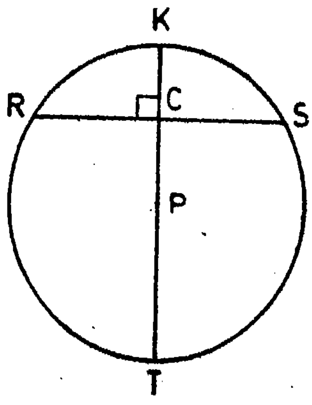
(a) प्रत्येक उदाहरण सोडवण्यासाठी आवश्यक असलेल्या माहितीपेक्षा **जास्त** माहिती दिली असेल तर त्या प्रश्नापुढे ‘M’ लिहा.

(b) जर प्रश्न सोडवण्यासाठी दिलेली माहिती **पुरेशी नसेल** तर त्या प्रश्नासमोर ‘I’ लिहा.

(c) जर दिलेली माहिती आवश्यक व **पुरेशी असेल** तर त्या प्रश्नासमोर ‘S’ लिहा.

(d) जर दिलेली माहिती विसंगत असेल तर त्या प्रश्नासमोर ‘C’ लिहा.

(लक्षात ठेवा की ही उदाहरणे तुम्हाला प्रत्यक्ष सोडवायची नाहीत. केवळ दिलेल्या माहितीच्या आधारे M, I, S, C असे वर्गीकरण करावयाचे आहे.)



आ. 1·43

(1) $l(\text{KP})=4,\ l(\text{PC})=1,\ l(\text{CT})=6,\ l(\text{KT})=?$

(2) $l(\text{RP})=5,\ l(\text{RS})=?$

(3) $l(\text{CT})=13,\ l(\text{CP})=5,\ l(\text{RS})=?$

(4) $l(\text{KP})=18,\ l(\text{RS})=48,\ l(\text{KC})=25,\ l(\text{RK})=$

(5) $l(\text{PC})=3{\cdot}5,\ l(\text{RS})=24,\ l(\text{RK})=?$

(6) $l(\text{KT})=40,\ l(\text{RP})=16,\ l(\text{CS})=?$

(7) $l(\text{CS})=8,\ l(\text{TK})=16,\ l(\text{PC})=?$

(8) $l(\text{RK})=20,\ l(\text{RS})=32,\ l(\text{KP})=13,\ l(\text{KT}))=?$

(9) $l(\text{RS})=6,\ l(\text{KC})=5,\ l(\text{PT})=?$

(10) $l(\text{PT})=5,\ l(\text{CS})=6,\ l(\text{RS})=?$

स्वाध्याय :

1. खाली दिलेल्या शब्दांच्या यादीपैकी योग्य शब्द निवडून रिकाम्या जागा भरा.

शब्द : वृत्तछेदिका, जीवा, त्रिज्या, अंतर्भाग, बाह्यभाग, स्पर्शिका, व्यास, एकरूप, एककेंद्री.

(i) दिलेल्या वर्तुळाचा केंद्र P असून त्रिज्या r असेल आणि d (P, B) $< r$ असेल तर B बिंदू, वर्तुळाच्या —— त असतो. (ii) ज्या दोन वर्तुळांच्या त्रिज्या समान असतात अशा वर्तुळांना —— वर्तुळे म्हणतात. (iii) ज्या दोन वर्तुळांचा केंद्र तोच असतो अशा वर्तुळांना —— वर्तुळे म्हणतात. (iv) जी रेषा वर्तुळाला फक्त एकाच बिंदूत छेदते तिला —— म्हणतात. (v) जी रेषा वर्तुळाला दोन बिंदूत छेदते तिला —— म्हणतात. (vi) दिलेल्या वर्तुळाचा केंद्र P असून त्रिज्या r आहे. जर d (P, B) $> r$, तर B बिंदू वर्तुळाच्या —— त आहे. (vii) वर्तुळाच्या जीवेला सामावणाऱ्या रेषेला —— म्हणतात. (viii) वर्तुळाच्या व्यासाचे माप हे त्याच्या —— च्या दुप्पट असते. (ix) ज्या रेषाखंडाचे एक टोक वर्तुळावर असून दुसरे टोक वर्तुळाचे केंद्र असते, अशा रेषाखंडाला वर्तुळाची —— म्हणतात. (x) ज्या रेषाखंडाची टोके वर्तुळावर असतात त्याला त्या वर्तुळाची —— म्हणतात.

2. एककेंद्री असलेल्या दोन वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 12 व 4 आहेत. मोठ्या वर्तुळाची जी जीवा लहान वर्तुळाला स्पर्श करते तिची लांबी काढा.

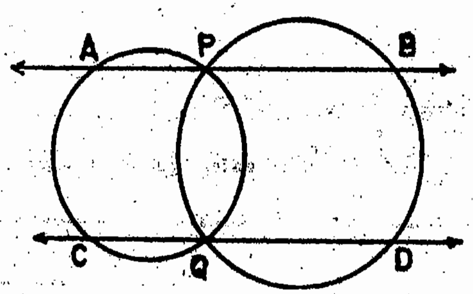
3. एका रेषेवर P, Q, R व S हे चार बिंदू असून त्यांचे निर्देशक अनुक्रमे 0, 3, 12 व 20 आहेत. खाली दिलेल्या प्रत्येक वर्तुळाकरता Q बिंदू वर्तुळावर आहे, वर्तुळाच्या अंतर्भागात आहे की वर्तुळाच्या बाह्यभागात आहे ते ठरवा.

(a) केंद्र P व त्रिज्या 3 असलेले वर्तुळ. (b) केंद्र S व त्रिज्या 15 असलेले वर्तुळ. (c) केंद्र Q व त्रिज्या 1 असलेले वर्तुळ. (d) केंद्र R व त्रिज्या 9 असलेले वर्तुळ. (e) केंद्र P व त्रिज्या 100 असलेले वर्तुळ.

4. दिलेल्या एका वर्तुळाचा केंद्र P असून त्रिज्या 10 आहे. Q बिंदू, L रेषेवर आहे आणि तो वर्तुळाच्या अंतर्भागात असून P पासून भिन्न आहे. तर खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत ते सांगा.

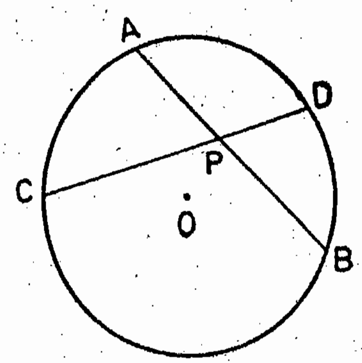
(a) P पासून Q पर्यंतचे अंतर 6 पेक्षा कमी आहे. (b) P बिंदू, रेषा L वर कधीच राहणार नाही. (c) रेषा L व दिलेले वर्तुळ यांच्या छेदसंचात फक्त एकच बिंदू राहील. (d) जर दिलेले वर्तुळ व रेषा L यांच्या छेदसंचातील बिंदूंपैकी एक बिंदू M असेल तर M आणि P एकच आहेत. (e) P पासून रेषा L वर काढलेल्या लंबाचा पाद F असेल तर F, वर्तुळाच्या अंतर्भागात आहे. (f) दिलेल्या वर्तुळाचे सर्व बिंदू, ज्याचा केंद्र Q आहे व त्रिज्या 20 आहे अशा वर्तुळाच्या अंतर्भागात आहेत. (g) जरी रेषा L, Q बिंदूतून जाते तरी ती वर्तुळाला छेदीलच असे नाही. (h) रेषा L, Q बिंदूतून जाते, त्यामुळे ती वर्तुळाला नक्कीच छेदते. (i) दिलेल्या वर्तुळाच्या ज्या जीवेला रेषा L सामावते त्या जीवेवर P पासून काढलेल्या लंबाचा पाद F असेल व त्या लंबाची लांबी 6 असेल तर जीवेची लांबी 4 आहे.

5. समलंब चौकोनाचे शिरोबिंदू जर एका वर्तुळावर असतील तर त्याच्या समांतर नसलेल्या बाजू एकरूप असतात हे सिद्ध करा.



आ. 1·44

दोन वर्तुळे P आणि Q मधे छेदतात. परस्परांना समांतर असणाऱ्या दोन रेषा P व Q मधून काढल्या. एक रेषा पहिल्या व दुसऱ्या वर्तुळाला अनुक्रमे A व B मधे छेदते व दुसरी रेषा अनुक्रमे C व D मधे छेदते (आ. 1·44). सिद्ध करा की रेख AB ≅ रेख CD.



आ. 1·45

7. **पक्ष :** जीवा AB व जीवा CD एकरूप असून P मधे छेदतात (आ. 1·45).
साध्य : $l(CP) = l(BP)$

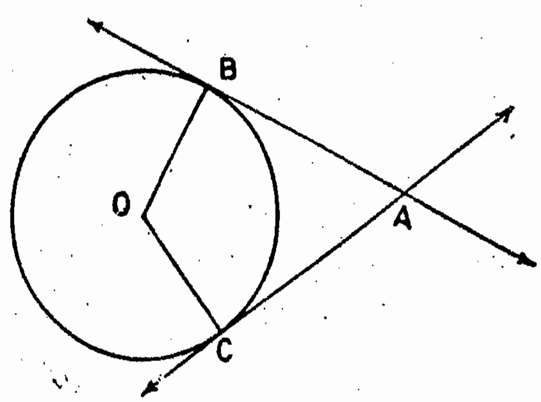
8. जर वर्तुळाच्या तीन जीवा एकाच बिंदूत छेदत असतील व एकरूप असतील तर त्या परस्परांस वर्तुळाच्या केंद्रामधे छेदतात हे सिद्ध करा.
(सूचना : उदा० 7 चा उपयोग करा.)

9. दोन वर्तुळांची केंद्रे अनुक्रमे A व B असून ती, P आणि Q मधे छेदतात. सिद्ध करा की रेख PQ ⊥ रेख AB आणि रेख PQ ला रेख AB दुभागतो.

10. दिलेल्या वर्तुळाचा केंद्र O असून त्रिज्या r आहे. त्या वर्तुळासंबंधी दिलेल्या खालील विधानांपैकी कोणती असत्य आहेत ते सांगा. ती असत्य विधाने सत्य करण्यासाठी लागणाऱ्या अटी सांगा.
(a) जर M हा **अवकाशातील** बिंदू असून $d(O, M) = r$ आहे तर M बिंदू, त्या **वर्तुळावर आहे.** (b) जर M बिंदू दिलेल्या वर्तुळावर असेल तर $d(O, M) = r$ (c) अवकाशातील एक रेषा L व दिलेले वर्तुळ परस्परांना एका बिंदूत छेदतात. तर रेषा L, त्या वर्तुळाची स्पर्शिका आहे. (d) रेषा L, वर्तुळाच्या प्रतलात असून वर्तुळाची त्रिज्या OA ला लंब आहे. तर रेषा L ही वर्तुळाची स्पर्शिका आहे. (e) जर रेषा L, वर्तुळाला P बिंदूच्या ठिकाणी स्पर्शिका असेल तर ती रेख OP ला लंब आहे.

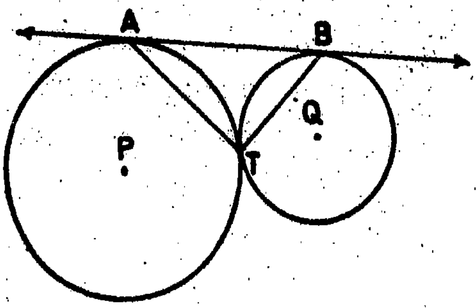
11. दोन वर्तुळे परस्परांना T मधे स्पर्श करतात. त्यांची केंद्रे A आणि B आहेत. A केंद्र असलेले लहान वर्तुळ मोठ्या वर्तुळाच्या B केंद्रातून जाते.
सिद्ध करा की, ज्या जीवेचे एक टोक T आहे अशी मोठ्या वर्तुळाची कोणतीही जीवा, लहान वर्तुळामुळे दुभागली जाते.

12. **पक्ष :** आ. 1·46 मधे O केंद्र असलेले वर्तुळ दाखवले असून त्याच्या दोन स्पर्शिका, रेषा BA व रेषा CA, A मधे छेदतात.
साध्य : $m\angle BAC = 180 - m\angle BOC$



आ. 1·46

13. दोन वर्तुळांची केंद्रे P आणि Q असून ती परस्परांना बाहेरून T मधे स्पर्श करतात. रेषा AB, त्या दोन्ही वर्तुळांची अनुक्रमे A व B मधे स्पर्शिका आहे (आ. 1·47). तर $m\angle ATB = 90$ हे सिद्ध करा.



आ. 1·47

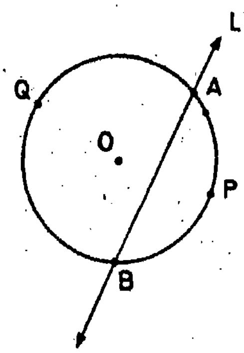
14. एका वर्तुळाच्या दोन जीवा, रेख AB व रेख AC एकरूप आहेत. ∠BAC ह्या कोनाचा दुभाजक वर्तुळाच्या केंद्रातून जातो हे सिद्ध करा.

15. केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची जीवा AB आहे. तिची लांबी 16 असून तिचे O पासून अंतर 6 आहे. जर दुसरी एक जीवा CD, 14 लांबीची असेल तर तिचे O पासूनचे अंतर काढा.

प्रकरण 2 : वर्तुळ : कंस

§ 2·1 आतापर्यंत आपण वर्तुळाचे काही गुणधर्म, त्याच्या त्रिज्या, व्यास, जीवा, वृत्तछेदिका व स्पर्शिका यांच्या संबंधात पाहिले. या प्रकरणात आपणास कंस व केंद्रीय कोनाच्या संदर्भात वर्तुळांचा अभ्यास करायचा आहे.

आ. 2·1 मध्ये दाखवलेल्या वर्तुळाचा केंद्रबिंदू O असून रेषा L ही त्याची वृत्तछेदिका आहे. ती वर्तुळाला A आणि B या दोन बिंदूंत छेदते. या वृत्तछेदिकेमुळे वर्तुळाच्या बिंदूसंचाचे दोन संचांत विभाजन झाले.



आ. 2·1

आता पुढील बिंदूसंचांचा विचार करा.

(i) A, B हे बिंदू आणि रेषा L च्या ज्या अंगास केंद्रबिंदू आहे त्या अंगास असलेल्या (वर्तुळाच्या) बिंदूंचा संच.

(ii) A,B हे बिंदू आणि रेषा L च्या ज्या अंगास केंद्रबिंदू नाही त्या अंगास असलेल्या (वर्तुळाच्या) बिंदूंचा संच.

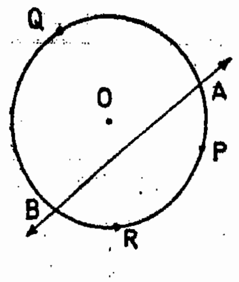
हे दोन्ही संच मूळ वर्तुळाच्या बिंदूसंचाचे उपसंच आहेत आणि ते वृत्तछेदिकेच्या विरुद्ध अंगास आहेत. A आणि B ही टोके असलेल्या या उपसंचाना त्या वर्तुळाचे **कंस** अथवा **चाप** (Arcs) म्हणतात व A आणि B या बिंदूंना त्या **कंसांची टोके** (End Points of Arcs) म्हणतात.

§ 2·2 कंस लिहिण्याची पद्धती :

आपणास असे दिसते की सारखीच टोके असलेले दोन कंस वर्तुळात नेहमीच दाखवता येतात आणि म्हणून A आणि B टोके असलेला कंस 'कंस AB' असा दाखवणे संदिग्ध होईल. कारण 'कंस AB' ने

दोनपैकी कोणता कंस अभिप्रेत आहे हे स्पष्ट होत नाही. म्हणून आपणास अभिप्रेत असलेल्या कंसाचा निश्चितपणे निर्देश करील अशी कंसाच्या लेखनाची पद्धती आपणास शोधावी लागेल. कोणत्याही कंसाचा निर्देश करताना आपण तीन अक्षरे वापरू. यांपैकी दोन अक्षरे कंसाची टोके दाखवणारी असून तिसरे अक्षर या कंसावरील इतर कोणताही बिंदू दाखवते.

उदाहरणार्थ, आ. 2·1 मध्ये ज्या कंसाची टोके A आणि B असून जो P मधून जातो तो कंस '**कंस** APB' असा दाखवला जाईल. त्याच आकृतीतील दुसरा कंस '**कंस** AQB' असा दाखवला जाईल.



आ. 2·2

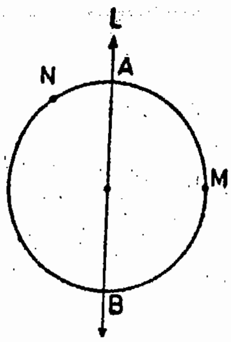
आ. 2·2 मधे कंस APB, कंस ARB, कंस BRA, कंस BPA एकाच कंसाची नावे आहेत. अशा वेळेस कंस APB = कंस ARB = कंस BRA = कंस BPA, असे आपण लिहू शकतो.

एकाच वर्तुळाचे कंस APB व कंस AQB हे दोन **भिन्न कंस** असतील तर ते वृत्तछेदिका AB च्या विरुद्ध अंगांस असले पाहिजेत हे उघड आहे.

§ 2·3 लघुकंस, विशालकंस व अर्धवर्तुळ :

आ. 2·2 मधील कंस APB पाहा. हा कंस वृत्तछेदिकेच्या दुसऱ्या अंगाकडील कंसापेक्षा लहान दिसतो का? या कंसाला **लघुकंस** (Minor Arc) म्हणतात. वर्तुळाचा जो कंस लघुकंस नाही त्याला **विशालकंस** (Major Arc) म्हणतात.

आ. 2·2 मधे कंस APB लघुकंस असून कंस AQB विशालकंस आहे.

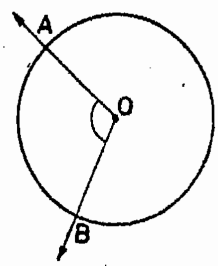


आ. 2·3

आता वृत्तछेदिका L ही वर्तुळाच्या केंद्रातून जात असेल तर होणाऱ्या दोन कंसांबद्दल आपण काय सांगू शकतो? हे दोन्ही कंस सारख्याच आकाराचे आहेत का? या रेषेवर कागदाची घडी घातली तर L रेषेच्या विरुद्ध अंगास असलेले वर्तुळाचे भाग परस्परांशी तंतोतंत जुळतात असे दिसते. म्हणजेच रेषा L भोवती हे वर्तुळ सममित आहे. याचाच अर्थ, केंद्रबिंदूतून जाणाऱ्या या वृत्तछेदिकेमुळे, वर्तुळाचे, तंतोतंत जुळणाऱ्या दोन कंसांत विभाजन झाले. त्यामुळे स्वाभाविकपणे या दोन कंसांत लहानमोठा असा भेद करता येणार नाही. म्हणून अशा वेळेस या कंसांना **अर्धवर्तुळ** (Semicircle) म्हणतात. आ. 2·3 मध्ये कंस AMB व कंस ANB ही दोन्ही अर्धवर्तुळे आहेत.

वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूतून जाणारा रेषाखंड AB, त्या वर्तुळाचा व्यास आहे हे आपणास माहीतच आहे.

§ 2·4 केंद्रीय कोन :

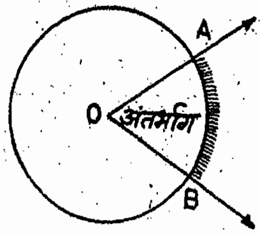


आ. 2·4

आ. 2·4 मधे दाखवलेल्या वर्तुळाचा केंद्रबिंदू O आहे. A आणि B हे दोन बिंदू वर्तुळावर असून **त्याच्या एकाही व्यासाची टोके नाहीत.** $\angle$ AOB ला केंद्रीय कोन म्हणतात.

वर्तुळाच्या प्रतलातील कोनाचा शिरोबिंदू त्या वर्तुळाचा केंद्रबिंदू असेल तर त्या कोनाला त्या वर्तुळाचा **केंद्रीय कोन** (Central Angle) म्हणतात.

§ 2·5 लघुकंसाची व विशालकंसाची संकल्पना केंद्रीय कोनाच्या संदर्भात खालीलप्रमाणे स्पष्ट करता येते.



आ. 2·5

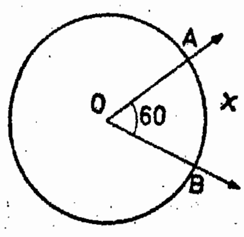
एखादया वर्तुळाचा केंद्रबिंदू O असेल आणि A व B हे दोन बिंदू वर्तुळावर असून वर्तुळाच्या व्यासाची टोके नसतील तर A व B हे बिंदू आणि ∠ AOB च्या अंतर्भागात असलेले वर्तुळावरील सर्व बिंदू यांना सामावणारा संच म्हणजे त्या वर्तुळाचा लघुकंस होय (आ. 2·5 पाहा). तसेच A व B हे बिंदू आणि ∠ AOB च्या बाह्यभागात असलेले वर्तुळावरील सर्व बिंदू यांना सामावणारा संच म्हणजे त्या वर्तुळाचा विशालकंस होय. जर A आणि B ही वर्तुळाच्या व्यासाची टोके असतील तर A व B हे बिंदू आणि रेषा AB ही कडा असलेल्या कोणत्याही एका अर्धप्रतलातील वर्तुळावरील सर्व बिंदू यांना सामावणारा संच म्हणजे अर्धवर्तुळ होय.

वर्तुळाचा कंस हा, दिलेली टोके असलेला वर्तुळाचा उपसंच असतो. रेषाखंडदेखील रेषेचा, दिलेली टोके असलेला उपसंच असतो. पण या दोघांमध्ये फरक आहे. रेषाखंडाची दोन टोके एक आणि एकच रेषाखंड निश्चित करतात. पण तीच टोके असलेले कंस मात्र अनेक राहतील. कारण दिलेले दोन बिंदू सामावणारी अनेक वर्तुळे असतील (आ. 2·6 पाहा).



आ. 2·6

§ 2·6 वर्तुळाच्या लघुकंसाची आणि विशालकंसाची संकल्पना आपण दोन दृष्टिकोनांतून पाहिली. एक म्हणजे वृत्तछेदिकेने केलेले वर्तुळाचे दोन उपसंच म्हणून आणि दुसरा म्हणजे केंद्रीय कोनाच्या अंतर्भागात अथवा बाह्यभागात असलेल्या (वर्तुळाच्या) बिंदूंचा संच म्हणून.



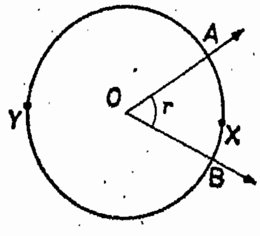
आ. 2·7

यांपैकी दुसऱ्या दृष्टिकोनामुळे आपल्याला कंसाचे अंशामधील माप ठरवता येते.

जसे, आ. 2·7 मध्ये ∠ AOB या केंद्रीय कोनाचे माप 60 दाखवले आहे. अशा वेळेस त्या वर्तुळाच्या, कंस AXB या लघुकंसाचे मापही 60 हेच आहे असे आपण म्हणू. म्हणजे या ठिकाणी कंसाचे अंशामधील माप आपण केंद्रीय कोनाच्या मापावरून ठरवले. अर्थात केंद्रीय कोन फक्त लघुकंस निश्चित करीत असल्याने केंद्रीय कोनावरून प्रत्यक्षपणे फक्त लघुकंसाचेच अंशामधील माप ठरवता येईल. त्याच आकृतीत विशालकंसाचे अंशामधील माप 360 – 60 = 300 होईल. अर्धवर्तुळाचे अंशामधील माप 180 असते.

आपण आता कंसाच्या अंशामधील मापाची व्याख्या खालीलप्रमाणे करू.

(i) लघुकंसाचे अंशामधील माप म्हणजे त्याच्याशी संगत अशा केंद्रीय कोनाचे माप होय.



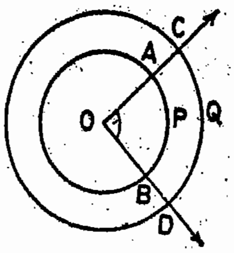
आ. 2·8

आ. 2·8 मध्ये लघुकंस AXB चे माप r आहे. अशा वेळी r हे, लघुकंस AXB ला संगत असलेल्या अथवा निगडित असलेल्या केंद्रीय कोनाचे माप आहे, असे म्हणतात. तसेच कंस AXB, ∠ AOB या केंद्रीय कोनाचा संगत लघुकंस अथवा निगडित लघुकंस आहे असे म्हणतात.

(ii) अर्धवर्तुळाचे अंशामधील माप 180 असते.

(iii) विशालकंसाचे अंशामधील माप म्हणजे 360 उणे (तीच टोके असलेल्या) त्याच्या संगत लघुकंसाचे माप होय. आ. 2·8 मध्ये विशालकंस AYP चे अंशामधील माप $(360-r)$ होईल.

केंद्रीय कोनाचे माप ही एक वास्तवसंख्या असते व म्हणून लघुकंसाचे अंशामधील माप देखील एक वास्तवसंख्याच होईल.



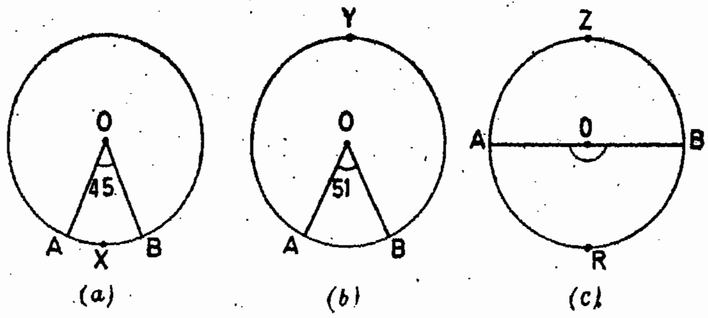
आ. 2·9

[टीप : कंसाचे अंशामधील माप कंसाची 'लांबी' दाखवीत नाही हे ध्यानात घ्या.

जसे आ. 2·9 मध्ये दोन एककेंद्री वर्तुळांचे कंस APB व कंस CQD ह्या दोन लघुकंसांचे अंशामधील माप सारखेच असले तरी त्यांच्या लांबी मात्र समान नाहीत.]

§ 2·7 कंसाचे अंशामधील माप लिहिण्याची पद्धती :

यापुढे कंसाचे अंशामधील माप 'कंसाचे माप' म्हणूनच संबोधले जाईल. कंस AXB चे माप m (कंस AXB) अथवा $m\,(\widehat{AXB})$ असे लिहितात.

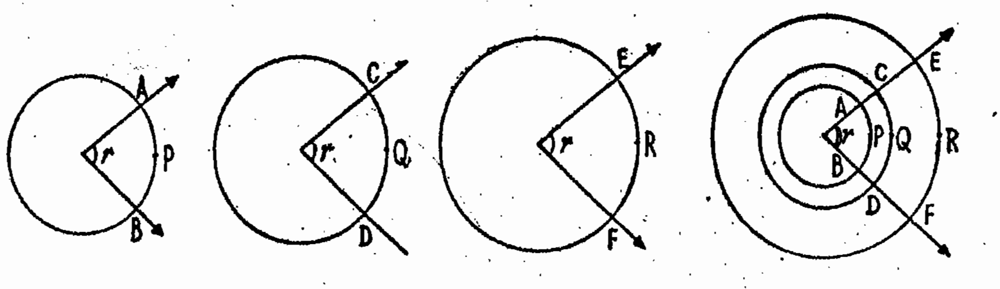


आ. 2·10

आकृती 2·10 पाहा. कंसाच्या मापाच्या व्याख्येवरून, (a) मधे m (कंस AXB) = 45, (b) मधे m (कंस AYB) = 360 − 51 = 309, (c) मधे m (कंस ARB) = m (कंस AZB) = 180.

लघुकंसाचे माप नेहमी 180 पेक्षा कमी असते, अर्धवर्तुळाचे माप 180 असते आणि विशालकंसाचे माप 180 पेक्षा जास्त असते. दिलेला कंस हा लघुकंस, विशालकंस किंवा अर्धवर्तुळ आहे हे त्याच्या मापावरून ठरवता येते.

समजा, m (कंस AB) = 45 आहे असे सांगितले, तर इथे केवळ कंसाच्या टोकांद्वारेच कंसाच्या नावाचा उल्लेख केला तर कंसाच्या निर्देशनात संदिग्धता येत नाही. कारण A आणि B ही ज्या लघुकंसाची व विशालकंसाची टोके आहेत त्यांपैकी फक्त लघुकंसाचेच माप 45 असू शकते. म्हणून m (कंस AB) = 45 असे सांगताना लघुकंसच अभिप्रेत आहे हे स्पष्ट आहे.



आ. 2·11

आकृती 2·11 मधे कंस APB, कंस CQD व कंस ERF हे, भिन्न त्रिज्या असलेल्या वर्तुळांचे कंस आहेत; परंतु हे सर्व कंस, ज्या कोनाचे माप r आहे अशा कोनाशी निगडित आहेत. तसेच, कोणत्याही त्रिज्येच्या अर्धवर्तुळाचे माप 180 राहील.

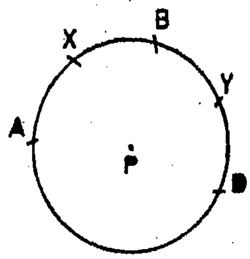
यांवरून हे स्पष्ट होते की कोणत्याही वर्तुळाच्या कंसाचे माप, त्या वर्तुळाच्या त्रिज्येवर अवलंबून नसते.

कोनांच्या बेरजेच्या गृहीतकामध्ये आपण विशिष्ट परिस्थितीत दोन कोनांच्या मापांची बेरीज तिसऱ्या कोनाच्या मापाबरोबर होते हे गृहीत धरले आहे. तसेच विधान कंसांच्या मापांबद्दल करता येईल का? एका वर्तुळाच्या दोन कंसांच्या मापांची बेरीज त्याच वर्तुळाच्या तिसऱ्या कंसाच्या मापाइतकी होऊ शकते का? होऊ शकत असेल तर ती कोणत्या परिस्थितीत?

या प्रश्नाचे उत्तर खालील प्रमेयात मांडले आहे.

§ 2·8 ▪ प्रमेय : कंसाच्या बेरजेचे प्रमेय.

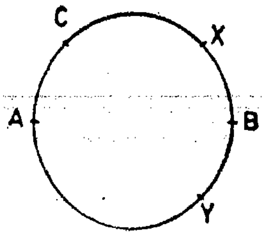
जर कंस AXB व कंस BYD हे एकाच वर्तुळाचे कंस असून त्यांना B हा फक्त एकच बिंदू समाईक असेल तर,
m (कंस AXB) + m (कंस BYD) = m (कंस ABD)



आ. 2·12

या प्रमेयाची सिद्धता किचकट असल्याने इथे टाळली आहे. या प्रमेयात सांगितलेला गुणधर्म आपण मान्य करणार आहोत. जर कंस ABD हा लघुकंस असेल तर कोनांच्या बेरजेच्या गृहीतकानुसार हे प्रमेय लगेच सिद्ध होते. मात्र प्रमेयाच्या संपूर्ण सिद्धतेसाठी इतरही पर्याय विचारात घ्यावे लागतील.

[टीप : वरील प्रमेयाच्या विधानात दोन कंसांना B हा फक्त एकच बिंदू समाईक आहे असे म्हटले आहे. याचा अर्थ, कंस AXB, व कंस BYC यांच्या बेरजेचा विचार करताना वरील प्रमेय लागू पडणार नाही (आ. 2·13).]



आ. 2·13

§ 2·9 प्रश्न :

1. खालील विधानांत रिकाम्या जागा सोडल्या आहेत. तेथे योग्य शब्द अथवा शब्दसमूह लिहून ती विधाने सत्य करा. आ. 2·14 चा आधार घ्या.

   (a) वर्तुळाच्या केंद्रीय कोनाचा शिरोबिंदू, वर्तुळाचा ——— असतो.

   (b) वर्तुळाच्या लघुकंसाचे माप, त्याच्या संगत ——— च्या मापाइतके असते.

   (c अर्धवर्तुळाचे माप ——— असते.

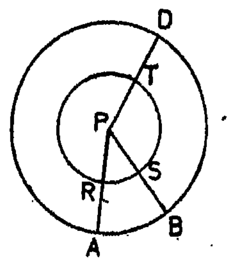
   (d) लघुकंसाचे माप 180 पेक्षा ——— असते.

   (e) m (लघुकंस AB) = $m\angle$ ———

   f) m (कंस ABD) = m (कंस AB) + ———

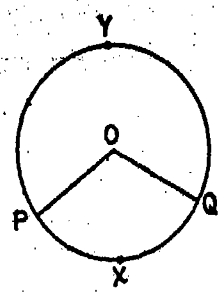
   (g आकृतीतील सहा लघुकंस ———, ———, ———, ———, ———, ——— हे आहेत.

   (h) आकृतीतील सहा विशालकंस ———, ———, ———, ———, ———, आणि ——— हे आहेत.



आ. 2·14

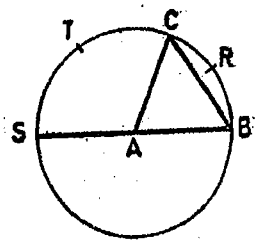
2. खालीलपैकी जी विधाने सत्य असतील त्यांच्यापुढे √ अशी खूण करा. जी सत्य नसतील त्यांच्यातील जाड अक्षरांतील शब्द बदलून दुसरे शब्द ठेवा व विधाने सत्य करा (आ. 2·15 पाहा).



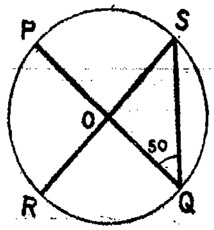
आ. 2·15

(i) वर्तुळाच्या लघुकंसाचे माप त्याच्या संबंधित विशालकंसाच्या मापापेक्षा **जास्त** असते. (ii) अर्धवर्तुळाचे माप **360** असते. (iii) वर्तुळाच्या लघुकंसाचे माप व त्याच्या संगत केंद्रीय कोनाचे माप समान असते. (iv) m(कंस PXQ)+m(कंस PYQ) =180 (v) $m\angle$**POQ**=m(कंस **PYQ**) (vi) अवकाशातील दोन बिंदू फक्त एकाच कंसाची टोके होऊ शकतात. (vii) कोणत्याही दोन अर्धवर्तुळांचे माप समान असते. (viii) जर केंद्रीय कोन $\angle$POQ चे माप 90 पेक्षा जास्त असेल तर कंस PXQ चे माप 90 पेक्षा जास्त राहील.

3. 2·16 मधे, वर्तुळाचा केंद्रबिंदू A असून l(BC)=l(AS) तर m(कंस BRC), m(कंस CBS), m(कंस CTS), m(कंस SCB) व m(कंस CSB) यांच्या किंमती काढा.



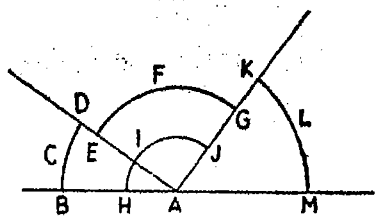
आ. 2·16

4. 

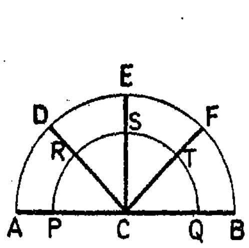
आ. 2·17

आ. 2·17 मधे रेख PQ व रेख RS हे दोन व्यास आहेत. जर $m\angle$PQS=50 असेल तर वर्तुळाच्या प्रत्येक कंसाचे माप काढा.

5. बाजूच्या आकृतीत दाखवलेल्या सर्व कंसांना सामावणाऱ्या वर्तुळांचा केंद्रबिंदू A असेल तर कोणत्या कंसाचे माप सर्वात जास्त आहे?



आ. 2·18

6. 

आ. 2·19

पक्ष : आ. 2·19 मध्ये, कंस ADB व कंस PSQ ही दोन अर्धवर्तुळे असून त्यांचा केंद्रबिंदू C आहे. रेख EC ⊥ रेख AB व रेख DC ⊥ रेख CF.

साध्य : m (कंस AD)+m (कंस QT)= m (कंस EF)+m (कंस RS)

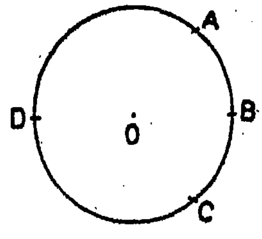
7. वर्तुळावरील दोन बिंदूंमुळे एक लघुकंस व एक विशालकंस निश्चित होतात. जर विशालकंसाचे माप लघुकंसाच्या मापाच्या चौपटीपेक्षा 40 ने कमी असेल तर त्या प्रत्येक कंसाचे माप काढा.

8. खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य व कोणती असत्य आहेत ते सांगा.

(i) P आणि Q ही जर विशालकंसाची टोके असतील तर ती त्याच वर्तुळाच्या दुसऱ्या लघुकंसाची टोके असणार नाहीत. (ii) विशालकंसाचा विरुद्ध कंस हा नेहमीच लघुकंस असतो. (iii) लघुकंस व त्याचा विरुद्ध विशालकंस यांचा संयोग वर्तुळ असते.

9. आ. 2·20 मध्ये वर्तुळाचा केंद्रबिंदू O असून A, B, C व D हे चार बिंदू वर्तुळावर आहेत. यांपैकी कोणतेही दोन बिंदू O शी एकरेषीय नाहीत. केवळ याच वर्तुळाच्या संदर्भात खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

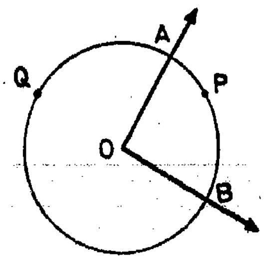
(i) $\angle$AOB, $\angle$DCB, $\angle$CBO व $\angle$DOC यांपैकी कोणते कोन केंद्रीय कोन आहेत ? (ii) जर P हा, वर्तुळाच्या प्रतलात कोणताही बिंदू असेल व $\angle$BPC हा केंद्रीय कोन असेल तर यावरून P=O आहे असे म्हणता येईल का ? (iii) R व S या कोणत्याही दोन बिंदूंसाठी $\angle$ROS हा त्या वर्तुळाचा केंद्रीय कोन होईल का ? (iv) आकृतीवरून, कोणत्या कंसाने $\angle$AOC हा केन्द्रीय कोन केला आहे ?



आ. 2·20

10. आ. 2·21 मध्ये वर्तुळाचा केंद्रबिंदू O आहे. लघुकंस APB शी संगत असलेला केंद्रीय कोन $\angle$AOB आहे. Q हा बिंदू कंस APB च्या विरुद्ध कंसात आहे. वर्तुळाची त्रिज्या r आहे.

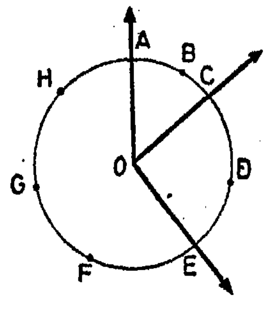
(i) जर $m\angle AOB=36$, तर m (कंस APB)= ? (ii) जर $m\angle AOB=179$, तर m (कंस APB)= ? (iii) जर $m\angle AOB=90$, $m\angle AOB=1$, $m\angle AOB=179$ तर $m\angle$AOB च्या वरील प्रत्येक किमतीसाठी m (कंस AQB) ची किंमत काढा. (iv) जर A, O व Q हे एकरेषीय असतील आणि $m\angle BQO=35$ असेल तर m(कंस APB) व m (कंस AQB) यांच्या किमती काढा. (v) m (कंस APB)=60 व m (कंस APB)=90 या दोन किमतींकरता रेख AB ची लांबी काढा. (vi) जर $x=m$ (कंस APB)+m (कंस BQA) तर x ची किंमत किती ?



आ. 2·21

11. खालील विधाने सत्य असतील तर कोणत्या कंसाचे माप x आहे हे आकृतीच्या आधारे सांगा.

(i)m (कंस ACE)=m (कंस ABC)+x. (ii) m (कंस HAD)−m (कंस BCD)=x. (iii) m (कंस HGC)+x=360. (iv) m (कंस AHG)+m (कंस GFE)=$x-m$ (कंस CDE). (v) $x=m\angle AOD$.

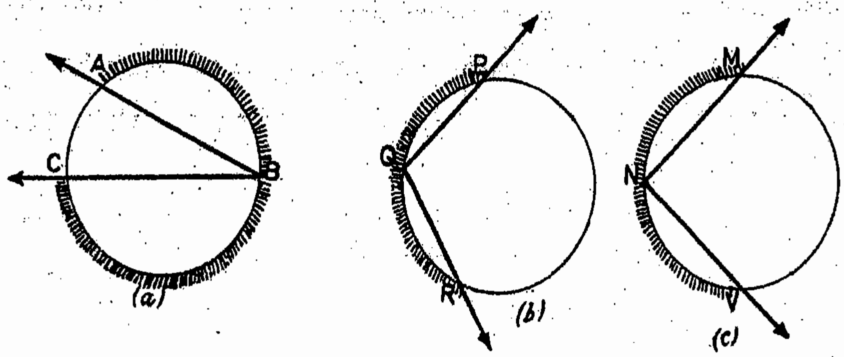


आ. 2·22

§ 2·10 आंतरलिखित कोन व आंतरखंडित कंस :

वर्तुळाच्या केंद्रीय कोनाच्या संकल्पनेचा कंसाचे माप ठरवण्यासाठी आपण कसा उपयोग करून घेतला हे ध्यानात घ्या. या केंद्रीय कोनाप्रमाणेच वर्तुळामधील इतर कोनांसंबंधी आणि त्या कोनांशी निगडित अशा कंसांसंबंधीचा अभ्यासही महत्वाचा आहे.

खालील आकृतीत दाखवलेले वर्तुळांतील कोन पाहा. यांना आपण वर्तुळाच्या कंसातील आंतरलिखित कोन म्हणू.



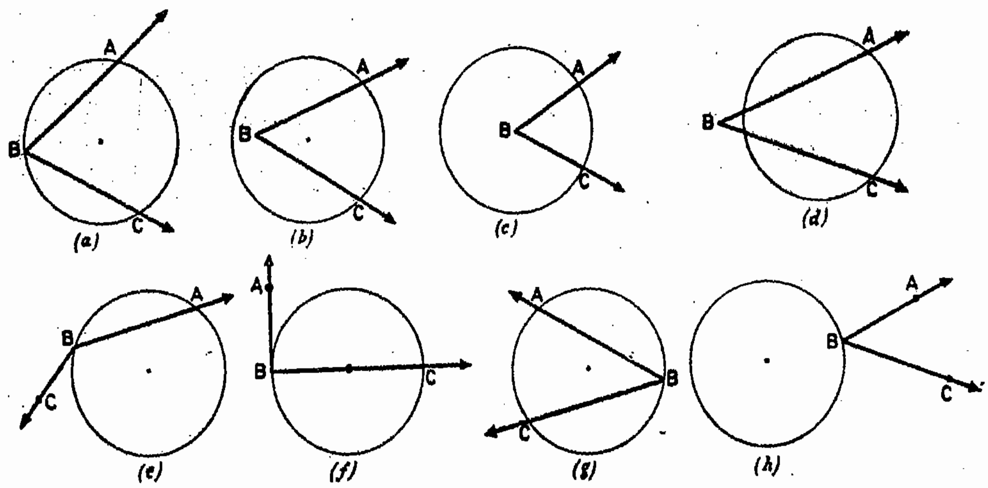
आ. 2·23

आ. (a) मधे ∠ABC हा, विशालकंस ABC मधे आंतरलिखित कोन आहे.
आ. (b) मधे ∠PQR हा, लघुकंस PQR मधे आंतरलिखित कोन आहे.
आ. (c) मधे ∠MNV हा, अर्धवर्तुळ MNV मधे आंतरलिखित कोन आहे.
आंतरलिखित कोनासंबंधीच्या वरील सर्व संकल्पना खाली व्याख्येच्या स्वरूपात मांडल्या आहेत.

व्याख्या : आंतरलिखित कोन

जर (i) एखादया कोनाच्या प्रत्येक बाजूवर एखादया वर्तुळाच्या कंसाचे प्रत्येकी एक टोक असेल आणि (ii) त्या कोनाचा शिरोबिंदू हा त्या कंसावरील (कंसाच्या टोकांहून वेगळा) बिंदू असेल तर त्या कोनाला त्या कंसाचा **आंतरलिखित कोन** (Inscribed Angle) म्हणतात.

वरील व्याख्येच्या अनुषंगाने खालीलपैकी कोणत्या कोनांना आंतरलिखित कोन म्हणता येईल हे तुम्हांला सांगता येते का पाहा.



आ. 2·24

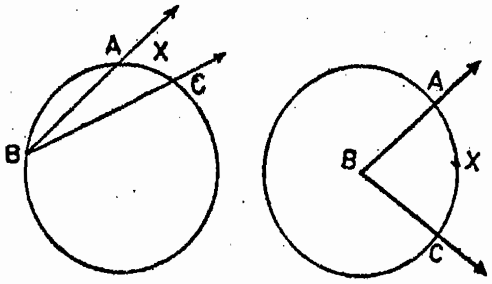
आ. 2·24 मध्ये (*a*) आणि (*g*) मधील वर्तुळांत आंतरलिखित कोन ∠ABC दाखवला आहे. (*b*), (*c*), (*d*), (*e*), (*f*) आणि (*h*) यांमधील कोन आंतरलिखित का होऊ शकत नाहीत याची कारणे व्याख्येच्या अनुरोधाने शोधून काढा.

तुमच्या वहीवर वर्तुळे काढून त्यात वेगवेगळ्या मापांचे आंतरलिखित कोन काढा. कोनांच्या त्या आकृत्यांवरून खालील बाबींचा पडताळा पाहा.

(i) विशालकंसात आंतरलिखित केलेला कोन लघुकोन असतो. (ii) लघुकंसात आंतरलिखित केलेला कोन विशालकोन असतो. (iii) अर्धवर्तुळात आंतरलिखित केलेला कोन काटकोन असतो.

§ 2·11 आंतरखंडित कंस :

आ. 2·25 मध्ये ∠ABC व कंस AXC पाहा. ∠ABC च्या भुजांवर कंस AXC ची A आणि C ही टोके असून तो संपूर्ण कंस ∠ABC च्या अंतर्भागात आहे. अशा वेळेस कंस AXC हा ∠ABC चा आंतरखंडित कंस आहे किंवा ∠ABC हा, कंस AXC आंतरखंडित करतो असे म्हणतात.

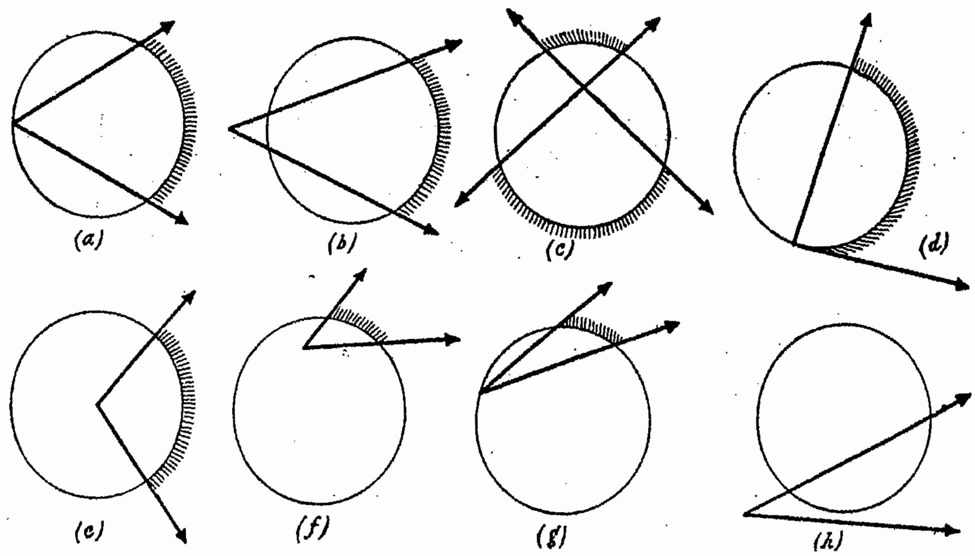


आ. 2·25

हेच आपण व्याख्येच्या रूपात मांडू.

व्याख्या : (i) एखादया कोनाच्या प्रत्येक बाजूवर एखादया कंसाचे प्रत्येकी एक टोक असेल आणि (ii) त्या कंसाचे इतर सर्व बिंदू त्या कोनाच्या अंतर्भागात असतील तर तो कोन त्या कंसाला आंतरखंडित करतो किंवा तो कंस त्या कोनाचा **आंतरखंडित कंस** (Intercepted Arc) आहे असे म्हणतात.

खालीलपैकी कोणत्या आकृत्यांमधे कोनांचे आंतरखंडित कंस दाखवले आहेत ते पाहा.



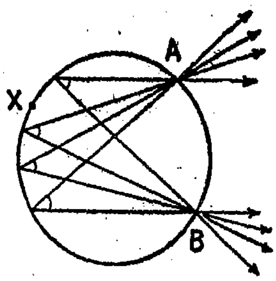
आ. 2·26

यांपैकी (*a*) ते (*g*) पर्यंतच्या सर्व आकृत्यांमधे रेखांनी दाखवलेले कंस व्याख्येतील अटी पूर्ण करतात. म्हणून हे कंस त्या आकृत्यांतील कोनांचे आंतरखंडित कंस होत. (*h*) मधील कोन कंसाला आंतरखंडित करतो असे आपण म्हणणार नाही. (कारण ?)

आ. 2·26 मधील आकृत्यांचे निरीक्षण करा व खालील गोष्टींचा पडताळा पाहा.

(i) आंतरखंडित कंसाशी निगडित कोन हा, आंतरलिखित कोन असतोच असे नाही. [(*b*), (*c*), (*d*), (*e*) व (*f*) पाहा.] (ii) आंतरलिखित कोनाशी निगडित असा आंतरखंडित कंस असतोच. [(*a*) व (*g*) पाहा.] (iii) एकच कोन एका वेळी दोन कंस आंतरखंडित करू शकतो. [(*b*) पाहा.]

§ 2·12 पुढील आकृतीत दाखवलेले सर्व कोन, कंस AXB मध्ये आंतरलिखित आहेत.



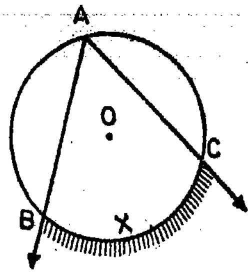
आ. 2·27

तुमच्या वहीत प्रत्यक्ष असे कोन काढून पाहा. त्या सर्व कोनांच्या आकारावरून त्यांच्या मापांसंबंधी तुम्हाला काय अंदाज बांधता येतो ? हे सर्व कोन एकरूप वाटतात का ? हे एकरूप असतील तर प्रत्येक कोनाचे माप किती असावे ?

अशा सर्व कोनांचे माप कसे ठरवायचे हे खालील प्रमेयात सांगितले आहे.

■ **आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय :**

आंतरलिखित कोनाचे माप हे त्या कोनाच्या आंतरखंडित कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.



आ. 2·28

पक्ष : वर्तुळाचा केंद्रबिंदू O असून त्या वर्तुळात $\angle A$ हा, कंस BAC मधील आंतरलिखित कोन, कंस BXC ला आंतरखंडित करतो (आ. 2·28).

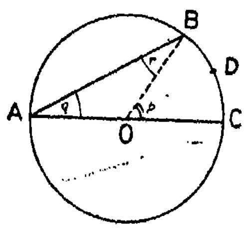
साध्य : $m\angle A = \frac{1}{2} m$ (कंस BXC)

सिद्धता : येथे आपल्याला तीन पर्याय विचारात घ्यावे लागतील.

(i) $\angle A$ ची भुजा वर्तुळाच्या व्यासाला सामावते. म्हणजेच किरण AB किंवा किरण AC हा वर्तुळाच्या व्यासाला सामावतो. (ii) B आणि C बिंदू हे A मधून जाणाऱ्या व्यासाला सामावणाऱ्या रेषेच्या विरुद्ध अंगास असतील. (iii) B आणि C बिंदू हे A मधून जाणाऱ्या व्यासाला सामावणाऱ्या रेषेच्या एकाच अंगास असतील.

पर्याय (i)

समजा, व्यास AC हा $\angle A$ च्या एका भुजेत सामावलेला आहे.



आ. 2·29

आ. 2·29 मध्ये $\triangle AOB$ हा समद्विभुज त्रिकोण होईल. (का ?) $\therefore m\angle BAO = m\angle OBA$

$\therefore q = r$

$\angle BOC$ हा $\triangle AOB$ चा बाह्यकोन आहे.

समजा, $m\angle BOC = p$

$\therefore$ बाह्यकोनाच्या प्रमेयानुसार,

$$p = q + r$$

$$= 2q, \because q = r$$

$$\therefore q = \frac{1}{2}p$$

परंतु, $q = m\angle BAC$

आणि $p = m$ (कंस BDC)

$\therefore m\angle BAC = \frac{1}{2}m$ (कंस BDC)

पर्याय (i) साठी हे प्रमेय सिद्‌ध होते हे आपणास माहीत झालें. याच पर्यायाचा उपयोग करून इतर दोन पर्याय सिद्‌ध करू.

पर्याय (ii) :

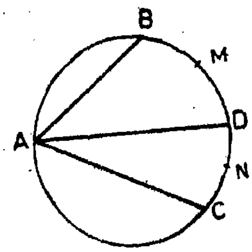
आ. 2·30 मधे दाखवल्याप्रमाणे B व C हे बिंदू रेषा AD च्या विरुद्‌ध बाजूस आहेत असे समजा.

$\therefore$ D हा $\angle BAC$ च्या अंतर्भागात आहे.

पर्याय (i) वरून, $m\angle BAD = \frac{1}{2}m$ (कंस BMD)

व $m\angle CAD = \frac{1}{2}m$ (कंस CND)

$\therefore m\angle BAD + m\angle CAD = \frac{1}{2}m$ (कंस BMD) + $\frac{1}{2}m$ (कंस CND).



आ. 2·30

कोनांच्या बेरजेच्या गृहीतकावरून, व कंसाच्या बेरजेच्या प्रमेयावरून

$m\angle BAC = \frac{1}{2}m$ (कंस BDC).

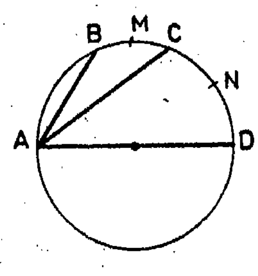
पर्याय (iii) :

आ. 2·31 मधे दाखवल्याप्रमाणे B व C बिंदू रेषा AD च्या एकाच अंगास आहेत असे समजा.

C बिंदू $\angle BAD$ च्या अंतर्भागात आहे असे गृहीत धरू. (B बिंदू $\angle CAD$ च्या अंतर्भागात आहे हा पर्यायदेखील याचप्रमाणे विचारात घ्यावा लागेल.)

पर्याय (i) वरून $m\angle BAD = \frac{1}{2}m$ (कंस BCD)

व $m\angle CAD = \frac{1}{2}m$ (कंस CND)



आ. 2·31

आता,

$m\angle BAC + m\angle CAD = \frac{1}{2}m$ (कंस BCD)

$= \frac{1}{2}m$ (कंस BMC) + $\frac{1}{2}m$ (कंस CND)

$\therefore m\angle BAC = \frac{1}{2}m$ (कंस BMC) हे सिद्‌ध झाले.

आताच सिद्‌ध केलेल्या आंतरलिखित कोनाच्या प्रमेयावरून खाली सांगितलेली महत्त्वाची उपप्रमेये सहज सिद्‌ध करता येतात.

§ 2·13 ▪ उपप्रमेय 1 :

अर्धवर्तुळातील आंतरलिखित कोन काटकोन असतो.

सिद्धतेसाठी आधारभूत ठरणारी काही विधाने खाली दिली आहेत. त्यांच्या साहाय्याने तुमची सिद्धता तयार करा.

(i) अर्धवर्तुळातील आंतरलिखित कोन अर्धवर्तुळ आंतरखंडित करतात. (ii) अर्धवर्तुळाचे माप 180 असते. (iii) आंतरलिखित कोनाचे माप हे त्या कोनाने आंतरखंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.

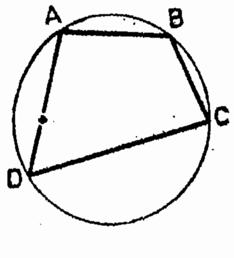
§ 2·14 ▪ उपप्रमेय 2 :

एकाच कंसात आंतरलिखित केलेले कोन एकरूप असतात.

एकाच कंसात आंतरलिखित केलेले कोन जो कंस आंतरखंडित करतात, तो कंस वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूशी एकच कोन करतो, या माहितीचा उपयोग करून हे उपप्रमेय सिद्ध करा.

§ 2·15 **चक्रीय आणि परिलिखित चौकोन** :

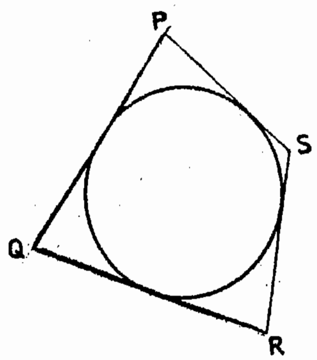
जर एखादया चौकोनाचे शिरोबिंदू वर्तुळावर असतील, म्हणजेच, एखादा चौकोन जर वर्तुळात आंतरलिखित असेल तर त्या चौकोनाला **चक्रीय चौकोन** (Cyclic Quadrilateral) म्हणतात. आ. 2·32 मधे चौकोन ABCD हा चक्रीय चौकोन आहे.



आ. 2·32

एखादया चौकोनाची प्रत्येक बाजू जर वर्तुळाला स्पर्श करीत असेल तर तो चौकोन वर्तुळाला **परिलिखित** आहे (Circumscribed about a Circle) असे म्हणतात.

आ. 2·33 मधे चौकोन PQRS, वर्तुळाला परिलिखित आहे.



आ. 2·33

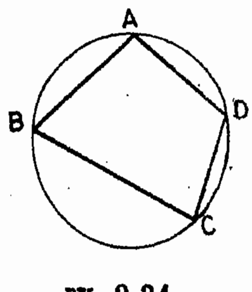
§ 2·16 चक्रीय चौकोनाचा एक गुणधर्म खाली सांगितला आहे. रिकाम्या जागी योग्य शब्द भरून सिद्धता पूर्ण करा.

▪ उपप्रमेय 3 :

चक्रीय चौकोनाचे समोरासमोरील कोन परस्परांचे पूरक असतात.

पक्ष : आ. 2·34 मधे चौकोन ABCD चक्रीय चौकोन आहे.

साध्य : $m\angle A + m\angle C = 180$
आणि $m\angle B + m\angle D = 180$



आ. 2·34

सिद्धता :

$\angle A$ने कंस ——— आंतरखंडित केला आहे. ——— प्रमेयावरून $m\angle$ ——— $=\frac{1}{2}m$ (कंस BCD) तसेच, $\angle C$ने कंस ——— आंतरखंडित केला आहे.

$\therefore m\angle C=\frac{1}{2}m$ ———

$\therefore m\angle A+m\angle C=\frac{1}{2}m$ ——— $+\frac{1}{2}m$ ———

परंतु m(कंस BAD)$+m$(कंस BCD)$=$ ———

$\therefore \frac{1}{2}m$ ——— $+\frac{1}{2}m$ ——— $=180$

$\therefore m\angle A+m\angle C=180$ हे सिद्ध झाले.

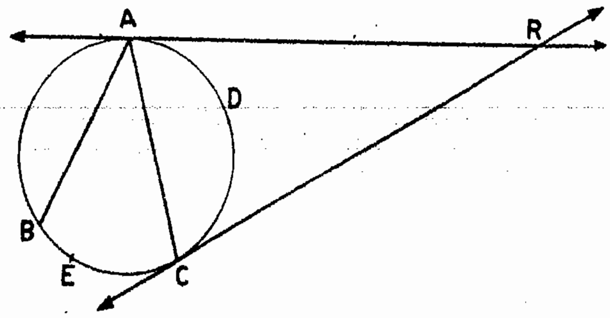
याचप्रमाणे, $m\angle$ ——— $+m\angle$ ——— हे सिद्ध करता येईल.

§ 2·17 ■ प्रमेय :

जर एखाद्या कोनाचा शिरोबिंदू वर्तुळावर असून त्याची एक बाजू त्या वर्तुळाला स्पर्श करीत असेल व दुसरी बाजू वर्तुळाला दोन बिंदूंत छेदत असेल तर त्या कोनाचे माप त्याने आंतरखंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.

प्रथम या प्रमेयात सांगितलेला गुणधर्म उदाहरणद्वारे समजावून घेऊ.

उदाहरण 1 :



आ. 2·35

पक्ष : आ. 2·35 मधे समजा, m (कंस ADC)$=76$ m (कंस BEC)$=40$ C हा $\angle RAB$ च्या अंतर्भागात आहे.

साध्य : (i) $\triangle RAC$ हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.

(ii) $m\angle RAB$ व m (कंस ACB) यांच्या किमती काढा.

सिद्धता : (i) वरील प्रमेयानुसार, $m\angle RAC=\frac{1}{2}m$(कंस ADC)$=\frac{1}{2}\times 76=38$

$m\angle RCA=\frac{1}{2}m$(कंस ADC)$=\frac{1}{2}\times 76=38$

$\therefore m\angle RAC=m\angle RCA$

$\therefore \triangle RAC$ हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.

(ii) $m\angle RAB=m\angle RAC+m\angle CAB$

$=m\angle RAC+\frac{1}{2}m$(कंस BEC)

$=38+20$

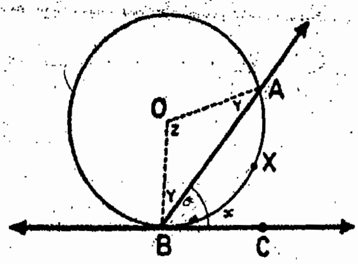
$=58$

$\frac{1}{2}m$ (कंस ACB) $=m\angle RAB$

$=58$

$\therefore m$ (कंस ACB) $=58\times 2=116.$

आता या प्रमेयाची सिद्धता पाहू.



आ. 2·36

पक्ष : $\angle ABC$ हा दिलेला कोन असून त्याचा शिरोबिंदू B वर्तुळावर आहे. त्याची एक भुजा, किरण BC वर्तुळाला B मधे स्पर्श करते व दुसरी बाजू किरण BA, वर्तुळाला B आणि A मधे छेदते. वर्तुळाचा केंद्रबिंदू O आहे.

साध्य : $m\angle ABC=\frac{1}{2}m$ (कंस BXA)

सिद्धता : रेख OB व रेख OA ह्या त्रिज्या काढा. कोनांची मापे आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे आहेत असे समजा.

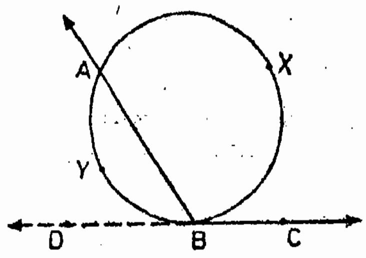
सिद्धतेमधे आपणास तीन पर्याय विचारात घ्यावे लागतील.

(i) $\angle ABC$ लघुकोन असेल.

(ii) $\angle ABC$ काटकोन असेल.

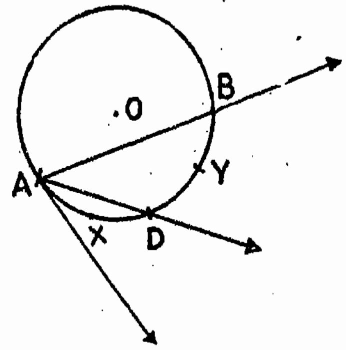
(iii) $\angle ABC$ विशालकोन असेल.

विधाने	कारणे
पर्याय (i) : $\angle ABC$ लघुकोन	
1. ABC लघुकोन असल्याने कंस AXB हा लघुकंस राहील.	1. लघुकंसाच्या मापाची व्याख्या
∴ आकृतीवरून, m (कंस AXB) $=z$	
2. $\triangle$ AOB मधे, $2y+z=180$	2. त्रिकोणाच्या कोनांच्या मापांची बेरीज.
$\therefore z=180-2y$	
3. रेख OB $\perp$ रेषा BC	3. स्पर्शिकेचे प्रमेय.
$\therefore x+y=90$	
$\therefore x=90-y$	
4. $2x=180-2y$	4. विधान 3
5. $\therefore 2x=z$	5. विधान 2
$\therefore x=\frac{z}{2}$	
6. $\therefore m\angle ABC=\frac{1}{2}m$ (कंस AXB) हे सिद्ध झाले.	
पर्याय (ii) : $\angle ABC$ हा काटकोन आहे. (आकृती काढा).	
1. $m\angle ABC=90$	1. रेख AB हा व्यास
∴ कंस AXB, अर्धवर्तुळ आहे.	
2. $\therefore m$ (कंस AXB) $=180$	2. अर्धवर्तुळाचे माप
3. $\therefore m\angle ABC=\frac{1}{2}m$ (कंस AXB)	3. विधान व 2

विधाने	कारणे
पर्याय (iii) : $\angle ABC$ विशालकोन आहे.	
 आ. 2·37	
1. $\angle ABC$ विशालकोन असल्याने कंस AXB, विशालकंस आहे. $\therefore$ कंस AYB, लघुकंस होईल. $\therefore m$ (कंस AXB) $= 360 - m$ (कंस AYB)	1. विशालकंसाच्या मापाची व्याख्या.
2. समजा, किरण BD, किरण BC चा विरुद्ध किरण आहे. $\therefore m\angle ABD = \frac{1}{2}\, m$ (कंस AYB)	2. पर्याय (i) करून
3. $m\angle ABC = 180 - m\angle ABD$	3. कोनांची रेषीय जोडी
4. $m\angle ABC = 180 - \frac{1}{2} m$ (कंस AYB)	4. विधान 2
5. $m\angle ABC = 180 - \frac{1}{2}[360 - m$ (कंस AXB)$]$	5. विधान 4 व 1
6. $\therefore m\angle ABC = 180 - 180 + \frac{1}{2} m$ (कंस AXB)	6. वितरणाचा नियम
7. $\therefore m\angle ABC = \frac{1}{2} m$ (कंस AXB)	

पुढील उदाहरण सोडवण्यासाठी या प्रमेयातील गुणधर्माचा कसा उपयोग करून घेतला आहे पाहा.

उदाहरण 2 :



आ. 2·38

पक्ष : आ. 2·38 मधे दाखवलेल्या वर्तुळाचा केंद्रबिंदू O असून लघुकंस AB वरचा D हा बिंदू असा आहे की m (कंस AXD) $= m$ (कंस DYB).

साध्य : किरण AD, $\angle BAC$ चा कोनदुभाजक आहे.

सिद्धता : रेख OA, रेख OB व रेख OD काढा.

$m\angle DAC = \frac{1}{2}\, m$ (कंस AXD)...प्रमेय.

$= \frac{1}{2}\, m\angle AOD$...कंसाचे माप

तसेच, $m\angle BAC=\frac{1}{2}m$ (कंस ADB)

$=\frac{1}{2}m\angle AOB.$

D बिंदू $\angle BAC$ च्या अंतर्भागात असल्याने

$m\angle BAD=m\angle BAC-m\angle DAC$

$=\frac{1}{2}m\angle AOB-\frac{1}{2}m\angle AOD$

$=\frac{1}{2}m\angle BOD$

$\therefore m\angle BAD=\frac{1}{2}m$ (कंस BYD)...कंसाचे माप

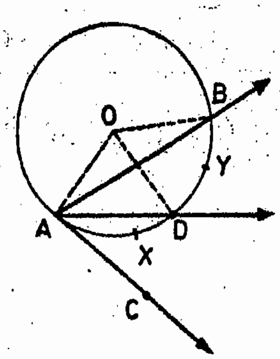
परंतु m (कंस BYD) $=m$ (कंस AXD)...पक्ष

$\therefore m\angle BAD=\frac{1}{2}m$ (कंस AXD)

परंतु $m\angle DAC=\frac{1}{2}m$ (कंस AXD)...प्रमेय

$\therefore m\angle DAC=m\angle BAD$

$\therefore$ किरण AD, $\angle BAC$ चा कोनदुभाजक आहे.



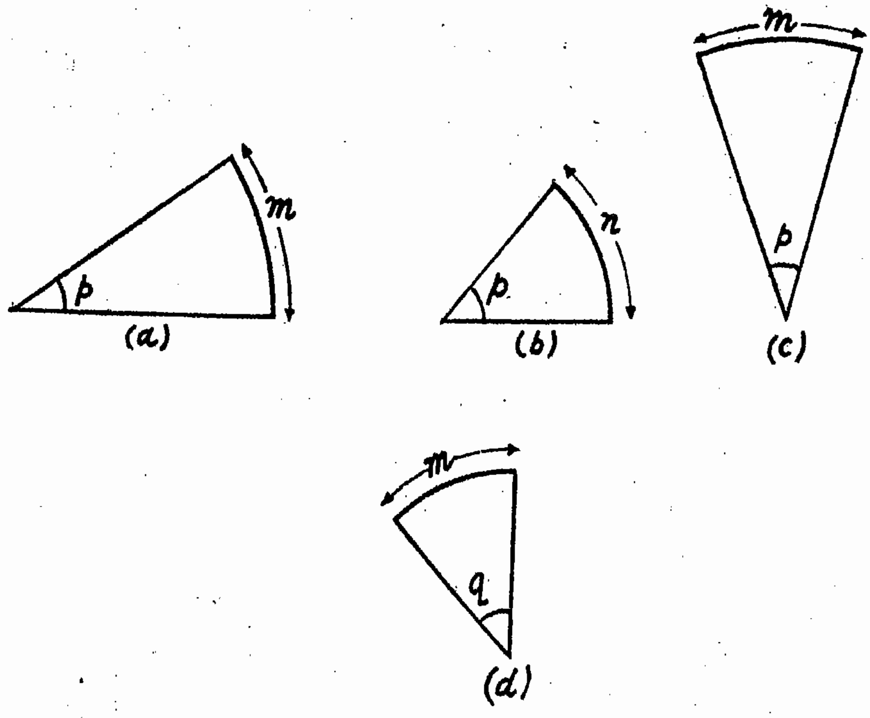
आ. 2·39

§ 2·18 कंसाची एकरूपता :

यापूर्वी आपण रेषाखंड, कोन, त्रिकोण, वर्तुळ इ. आकृतींच्या एकरूपतेचा अभ्यास केला. ज्या रेषाखंडांची 'लांबी' समान असते ते एकरूप असतात. समान 'मापाचे' कोन एकरूप असतात. एकरूप त्रिकोणात संगत बाजू व कोन एकरूप असतात. वर्तुळांच्या त्रिज्या समान असतील तर ती वर्तुळे एकरूप आहेत असे आपण म्हणतो.

जेव्हा दोन भूमितीय आकृती एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात तेव्हा त्या आकृती एकरूप आहेत असे म्हटले जाते. दोन आकृतींची एकरूपता ठरवण्याची एक पद्धत म्हणजे त्या एकमेकांवर ठेवून एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात की नाही ते पाहणे.

दोन कंसांची एकरूपता आपणास कशी ठरवता येईल? खाली दिलेल्या आकृतींमधील एकरूप असलेल्या कंसांच्या जोडया तुम्हास शोधता येतात का पाहा.



आ. 2·40

कंसाचे 'अंशामधील माप' म्हणजेच त्याच्या केंद्रीय कोनाचे माप आणि त्या कंसांची लांबी या दोन बाबी कंसांची एकरूपता ठरवण्यासाठी साहयभूत ठरतात. एकच माप असलेल्या कंसांची लांबी वेगवेगळी असू शकते हे आपण पाहिलेच आहे.

आ. 2·40 (a) व (b) मधे जरी दोन कंसांचे माप एकच (म्हणजे p) असले तरी ते दोन कंस एकरूप नाहीत हे आपणास चटकन जाणवते. तसेच, दोन कंसांची लांबी समान असल्याने ते कंस एकरूप होत नाहीत. जसे, (a) व (d) मधील दोन कंसांची लांबी m असली तरी ते दोन कंस एकरूप नाहीत हे आपण खात्रीने सांगू शकतो. म्हणजेच केवळ कंसांच्या मापांची समानता अथवा केवळ कंसांच्या लांबींची समानता, कंसांची एकरूपता ठरवण्यास पुरेशी नाही.

(a) व (c) मधील कंस एकरूप आहेत असे तुम्हांला वाटते का? याचा अर्थ असा की या दोन्ही बाबींचा संयुक्तपणे अंतर्भाव करूनच आपल्याला कंसांच्या एकरूपतेच्या संबोधाची कल्पना देता येईल.

ज्या दोन कंसांची मापे समान आहेत **आणि** लांबीही समान आहे अशाच कंसांना एकरूप कंस म्हणता येईल. त्याचप्रमाणे आपणास हे पडताळून पाहाता येईल की या दोन्ही अटी पाळल्या जाण्याची शक्यता, एकाच वर्तुळाच्या अथवा एकरूप वर्तुळाच्या कंसांच्या बाबतीत असते.

वरील चर्चेच्या अनुरोधाने आपण एकरूप कंसांची व्याख्या खालीलप्रमाणे करू शकतो.

व्याख्या : एकरूप कंस

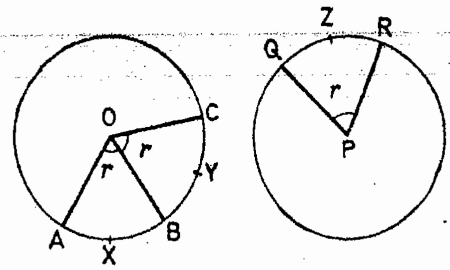
एकाच वर्तुळातील अथवा एकरूप वर्तुळातील ज्या कंसांचे माप समान असते त्यांना **एकरूप कंस** म्हणतात.

आ. 2·41 मधे सारख्याच त्रिज्यांची दोन वर्तुळे काढली आहेत.

कंस AXB, कंस BYC व कंस QZR या सर्वांचे माप r आहे. म्हणून हे तीनही कंस एकरूप आहेत, असा निष्कर्ष निघतो.

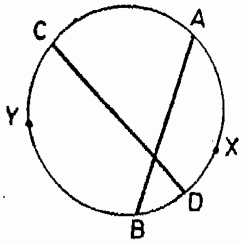
हेच खालीलप्रमाणे दाखवतात.

कंस AXB ≅ कंस BYC ≅ कंस QZR



आ. 2·41

§ 2·19 वर्तुळाच्या प्रत्येक कंसाशी निगडित अशी जीवा आपणास दाखवता येते. कंसांची टोके हीच ह्या जीवांची टोके असतात.



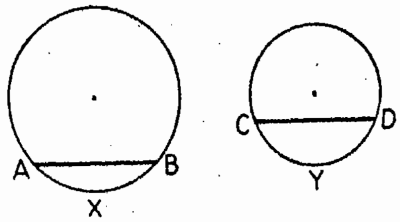
आ. 2·42

आ. 2·42 मधे जीवा AB ही, कंस AXB व कंस AYB यांच्याशी निगडित आहे.

जीवा CD कंस CXD व कंस CYD यांच्याशी निगडित आहे. एकाच वर्तुळाच्या दोन जीवा एकरूप असतील तर त्यांच्याशी निगडित असलेल्या संगत कंसांच्या एकरूपतेविषयी काय सांगता येईल?

खालील आकृतीत असमान त्रिज्यांची दोन वर्तुळे काढली आहेत.

वर्तुळांच्या, रेख AB व रेख CD ह्या दोन जीवा एकरूप आहेत. यांच्याशी निगडित असलेले कंस AXB व कंस CYD एकरूप दिसतात का? का वाटत नाहीत? ते



आ. 2·43

एकरूप होण्यासाठी संगत जीवांच्या एकरूपतेबरोबरच आणखी कोणती अट आवश्यक आहे? दोन वर्तुळे समान त्रिज्यांची असती तर कंस AXB व कंस CYD एकरूप आहेत असे आपणाला म्हणता आले असते का?

या चर्चेचा निष्कर्ष खाली प्रमेयाच्या रूपात मांडून दाखवला आहे.

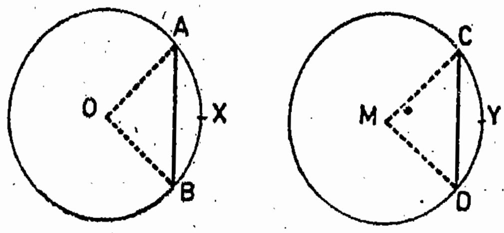
■ लघुकंसांच्या एकरूपतेचे प्रमेय :

एकाच वर्तुळातील किंवा एकरूप वर्तुळातील जीवा जर एकरूप असतील तर त्यांचे संगत लघुकंस एकरूप असतात.

पक्ष : दोन एकरूप वर्तुळांचे केंद्रबिंदू अनुक्रमे O आणि M असून जीवा AB ≅ जीवा CD.

साध्य : लघुकंस AXB ≅ लघुकंस CYD.

सिद्धता : सिद्धतेला आधारभूत होणारे पृथक्करण पुढे दिले आहे. त्यानुसार सिद्धता तुम्ही स्वतः लिहा.



आ. 2·44

1. कोणते कंस एकरूप दाखवायचे आहेत?
2. हे कंस एकरूप दाखवण्यासाठी कोणते कोन एकरूप दाखवावे लागतील?
3. हे कोन कोणत्या त्रिकोणात येतात?
4. हे कोन एकरूप दाखवण्यासाठी कोणते दोन त्रिकोण एकरूप दाखवावे लागतील?
5. हे दोन त्रिकोण एकरूप दाखवण्यासाठी पुरेशी माहिती आपल्याजवळ आहे का?

आता प्रथम दोन त्रिकोणांची एकरूपता प्रस्थापित करा व नंतर सिद्धता पूर्ण करा. प्रत्येक वर्तुळ हे स्वतःशी एकरूप असल्याने हीच सिद्धता एकाच वर्तुळातील जीवांना लागू पडेल.

[टीप : जर संबंधित जीवा व्यास असतील तर वर्तुळात लघुकंस अथवा विशालकंस असे राहाणार नाही. दोन्ही कंस ही अर्धवर्तुळे राहतील. म्हणून प्रमेयाच्या सिद्धतेत दाखवलेले दोन त्रिकोण अस्तित्वात येणार नाहीत. पण अशा बाबतीत सिद्ध करण्यासारखे फारसे उरतच नाही. तुम्हांला याची सिद्धता देता येते का पाहा.]

या प्रमेयाचा व्यत्यास देखील सत्य आहे.

§ 2·20 ■ व्यत्यास :

एकाच वर्तुळातील किंवा एकरूप वर्तुळातील लघुकंस जर एकरूप असतील तर त्यांच्याशी निगडित असलेल्या जीवा एकरूप असतात.

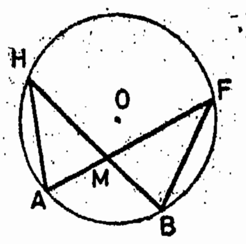
या व्यत्यासाची सिद्धता सोपी आहे. ती तुम्ही स्वतः लिहा. इथेही दोन त्रिकोण एकरूप दाखवावे लागतात हे ध्यानात घ्या.

लघुकंसांच्या एकरूपतेचे प्रमेय व त्याचा व्यत्यास यावर आधारित एक उदाहरण सोडवून दिले आहे. त्यात वरील दोन गुणधर्मांचा कसा उपयोग करून घेतला आहे ते काळजीपूर्वक अभ्यासा.

उदाहरण :

पक्ष : आ. 2·45 मधे रेख BH ≅ रेख AF

साध्य : रेख AH ≅ रेख BF.



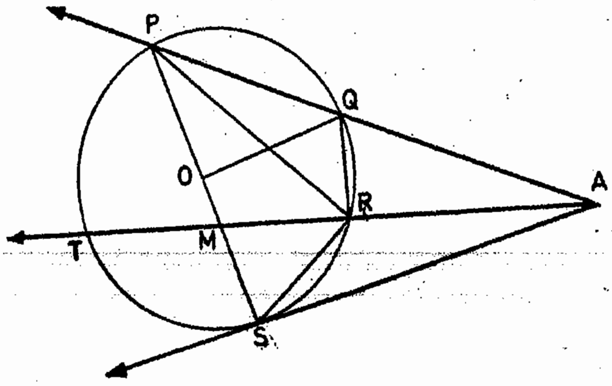
आ. 2·45

सिद्धता : पुढील प्रश्नांची उत्तरे देऊन सिद्धता पूर्ण करा.
प्रत्येक पायरीच्या उत्तरासाठी आधार म्हणून कंसात दिलेल्या माहितीचा उपयोग करा.

1. कोणत्या दोन जीवा एकरूप दिल्या आहेत ? (पक्ष)
2. त्यामुळे कोणते दोन कंस एकरूप होतील ? (कंसांच्या एकरूपतेचे प्रमेय)
3. हे दोन कंस प्रत्येकी कोणत्या दोन कंसांचे मिळून बनले आहेत ? (कंसांच्या बेरजेचे प्रमेय)
4. दोन्ही कंसांना कोणता कंस समाईक आहे ?
5. हा समाईक कंस वगळता कोणते दोन कंस एकरूप दाखवता येतील ?
6. त्यावरून कोणते रेषाखंड एकरूप होतील ? (लघुकंसांच्या एकरूपतेच्या प्रमेयाचा व्यत्यास).

§ 2·21 प्रश्न :

1. रिकाम्या जागा भरा.
आ. 2·46 मधे,



आ. 2·46

(i) ∠SPQ हा, कंस __SPQ__ मधे आंतरलिखित आहे.

(ii) ∠PSR हा, कंस __PQR__ आंतरखंडित करतो.

(iii) ∠ __PQR__ कंस PQR मधे आंतरलिखित आहे.

(iv) ∠ __PQT__ कंस PQT मधे आंतरलिखित आहे.

(v) ∠PAR ने आंतरखंडित केलेले कंस __QRS__ व __PTS__ हे आहेत.

(vi) __RS__ व __TS__ हे कंस ∠TAS ने आंतरखंडित केले आहेत.

(vii) कंस QRS व कंस PTS हे, ∠ __PAS__ ने आंतरखंडित केले आहेत.

(viii) ∠PMT हा आंतरलिखित कोन ______ (आहे / नाही).

(ix) ∠SPR हा आंतरलिखित कोन ______ (आहे / नाही).

(x) ∠PAS हा आंतरलिखित कोन ______ (आहे / नाही).

(xi) ∠PRS हा __अर्धवर्तुळ__ मधे आंतरलिखित कोन आहे. म्हणून △PRS हा __काटकोन__ त्रिकोण होईल.

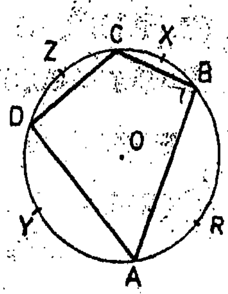
(xii) $m\angle PRQ = 40$ $\therefore m\angle POQ =$ __80__.

(xiii) $m\angle QPS = 35$ $\therefore m\angle QRS =$ __145__.

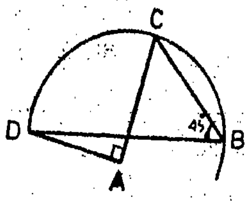
(xiv) $m\angle PQR = 110$ $\therefore m\angle$ __PSR__ $= 70$.

(xv) $m\angle PTS =$ __90__.

2. आ. 2·47 मधे वर्तुळाचा केंद्रबिंदू O असून चौकोन ABCD हा चक्रीय चौकोन आहे.
जर $m\angle DCB = 130$, m(कंस DZC) $= 40$ व m(कंस ARB) $= 90$, तर खालील किंमती काढा.
$m\angle A$, m (कंस CXB), m (कंस AYD), $m\angle D$ व $m\angle B$.



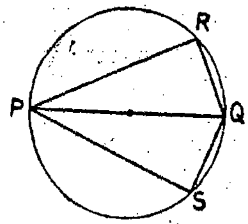
आ. 2·47

3. 

आ. 2·48

आ. 2·48 मधे $m\angle CBD = 45$ असून वर्तुळाचा केंद्रबिंदू A असेल तर रेख DA $\perp$ रेख CA हे सिद्ध करा.
(सूचना : आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय वापरा).

4. दिलेल्या वर्तुळाचा व्यास रेख PQ असून रेख RQ $\cong$ रेख SQ (आ. 2·49).
सिद्ध करा की, रेख PR $\cong$ रेख PS.



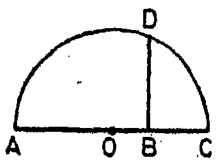
आ. 2·49

5. (a) कंस ARB मधे $\angle ARB$ व $\angle ASB$ हे कोन आंतरलिखित आहेत. जर, m(कंस ARB)$=20$ असेल तर $m\angle ARB$ व $m\angle ASB$ काढा.

(b) विशालकंस ARB मध्ये $\angle ARB$ व $\angle ASB$ आंतरलिखित आहेत. लघुकंस AXBचे माप 130 असेल तर $m\angle ARB$ व $m\angle ASB$ काढा.

(c) एकाच वर्तुळाच्या दोन कंसांत $\angle ARB$ व $\angle DEF$ आंतरलिखित आहेत.
जर m(कंस ARB)$>$ m(कंस DEF) असेल तर $\angle ARB$ व $\angle DEF$ यांपैकी कोणत्या कोनाचे माप जास्त असेल ?

6. जर एखाद्या कंसामधे आंतरलिखित कोनाचे माप 90 असेल तर तो कंस म्हणजे अर्धवर्तुळ असते हे सिद्ध करा.

7. 

आ. 2·50

पक्ष : आ. 2·50 मधे कंस ADC हे अर्धवर्तुळ असून बिंदू O त्याचा केंद्रबिंदू आहे.
रेख AC $\perp$ रेख BD, $l(DB)=a$, $l(AB)=b$ व $l(BC)=c$

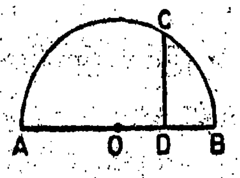
साध्य : $a^2=bc$

(सूचना : $\triangle ABD$ व $\triangle CBD$ मधे रेख AD व रेख CD यांच्या लांबीकरता पायथॅगोरसचे प्रमेय वापरा. नंतर अर्धवर्तुळातील कोन काटकोन असतो हे उपप्रमेय वापरा.)

8. एका काटकोन त्रिकोणात काटकोनाच्या शिरोबिंदूचे कर्णाच्या मध्यबिंदूपर्यंतचे अंतर 30 आहे तर कर्णाची लांबी किती ?

9. एका वर्तुळाची त्रिज्या 10 आहे. तर त्या वर्तुळात आंतरलिखित केलेल्या काटकोन चौकोनाच्या कर्णाची लांबी किती असेल ?

10. आ. 2·51 मध्ये वर्तुळाचा केंद्रबिंदू O आहे. समजा त्रिज्या r असून रेख CD ⊥ रेख AB, $l(AD)=a$, $l(BD)=b$ व $l(CD)=c$.
खाली दिलेल्या माहितीवरून विचारलेल्या किमती काढा.



आ. 2·51

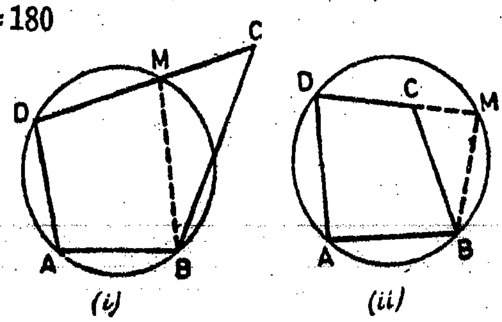
(i) $a=9, b=4$, तर $c=?$ (ii) $2r=25, a=5$, तर $c=?$
(iii) $a=3, b=1$, तर $c=?$ (iv) $2r=25, c=12$, तर $a=?, b=?$
(सूचना : उदा॰ 7 मधील निष्कर्ष वापरा.)

11. एकाच वर्तुळाच्या एकरूप कंसांनी आंतरलिखित केलेले कोन एकरूप असतात, हे सिद्ध करा.

12. पक्ष : एका वर्तुळात △ ABC आंतरलिखित आहे. जीवा AE ⊥ रेख BC आणि जीवा CD ⊥ रेख AB
साध्य : लघुकंस BD चे माप = लघुकंस BE चे माप.

13. खालील प्रमेय सिद्ध करा.
जर एखाद्या चौकोनाचे समोरासमोरील कोन पूरक असतील तर तो चक्रीय चौकोन असतो.

पक्ष : □ ABCD मध्ये $m\angle A+m\angle C=180$ व $m\angle B+m\angle D=180$.
साध्य : □ ABCD चक्रीय चौकोन आहे.
सिद्धता : □ ABCD चे A, B व D हे तीन बिंदू नैकरेषीय आहेत.
∴ A, B व D मधून जाणारे एक वर्तुळ आहे. (का ?)
C बिंदूबाबत तीन पर्याय संभवतात.



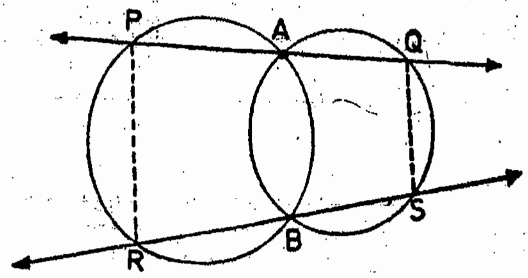
आ. 2·52

(i) हे वर्तुळ रेख DC ला अशा तऱ्हेने छेदते की D—M—C (आ. 2·52 (i))
(ii) हे वर्तुळ रेख DC ला अशा तऱ्हेने छेदते की D—C—M (आ. 2·52 (ii))
(iii) हे वर्तुळ C मधून जाते.

पर्याय (i)
1. □ ABMD चक्रीय चौकोन आहे.
2. ∴ $m\angle A+m\angle DMB=180$...उपप्रमेय 3 § 2·16
3. परंतु पक्षावरून $m\angle A+m\angle C=180$
4. ∴ (2) व (3) वरून,
$m\angle DMB=m\angle C$
5. परंतु त्रिकोणाचा बाह्यकोन त्याच्याशी असंलग्न असलेल्या प्रत्येक कोनापेक्षा मोठा असतो ह्या प्रमेयाशी हे विसंगत आहे.
6. ∴ पर्याय (i) असंभव आहे.

पर्याय (ii) हादेखील असंभव आहे हे तुम्ही दाखवा.
∴ पर्याय (iii) सत्य आहे. ∴ हे वर्तुळ C मधून जाते.
∴ □ ABCD हा चक्रीय चौकोन आहे.

14. चक्रीय चौकोनाचा बाह्यकोन हा त्याच्याशी संलग्न असणाऱ्या कोनाच्या समोरील कोनाशी एकरूप असतो, हे सिद्ध करा.

15. 

आ. 2·53

पक्ष : दोन वर्तुळे परस्परांना A व B बिंदूत छेदतात. रेषा PQ ही वर्तुळांना अनुक्रमे P व Q मधे व रेषा RS अनुक्रमे R व S मधे छेदते.

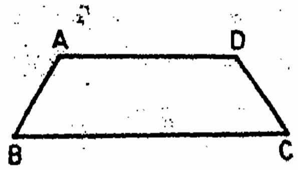
साध्य : रेषा PR ∥ रेषा QS.

(सूचना : रेषा AB काढून उदा० 14 चा उपयोग करा.)

16. पक्ष : आ. 2·54 मधे,
रेख AD ∥ रेख BC व रेख AB ≅ रेख DC

साध्य : □ ABCD चक्रीय चौकोन आहे.

(सूचना : उदा० 13 चा उपयोग करा.)

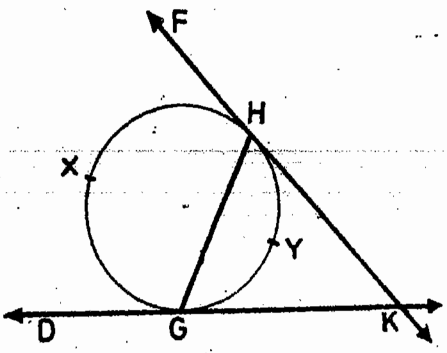


आ. 2·54

17. पक्ष : दिलेल्या वर्तुळाला रेषा DK व रेषा FK अनुक्रमे G व H मधे स्पर्श करतात (आ. 2·55). खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(i) विशालकंस GXH चे माप 242 असेल तर $m\angle DGH=$?
व $m\angle GHK=$?

(ii) $\angle KHG \cong \angle KGH$ या विधानाला पुष्टी देणारे कारण कोणते ?



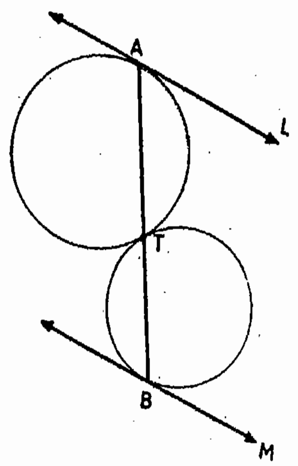
आ. 2·55

(iii) $m\angle FKD=60$. तर विशालकंस GXH चे माप लघुकंस GYH च्या मापाच्या दुप्पट आहे हे कसे सिद्ध कराल ?

18. पक्ष : परस्परांना T बिंदूत बाहेरून स्पर्श करणारी व एकरूप नसलेली दोन वर्तुळे आ. 2·56 मधे दाखवली आहेत. T मधून जाणारा रेख AB त्यांना अनुक्रमे A व B मधे छेदतो. रेषा L व रेषा M ह्या अनुक्रमे A व B बिंदूत आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे वर्तुळांच्या स्पर्शिका आहेत.

साध्य : रेषा L ∥ रेषा M

(सूचना : वर्तुळांची समाईक स्पर्शिका काढा.)

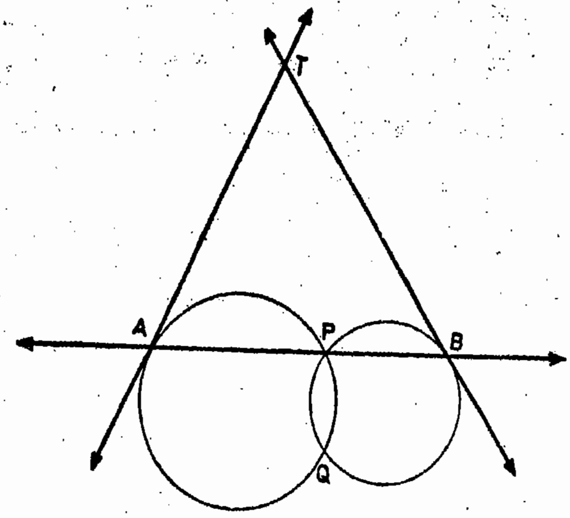


आ. 2·56

19. उदा. 18 मधील वर्तुळे परस्परांना आतून स्पर्श करीत असतील तर रेषा $L \parallel M$ हे सिद्ध करा.

20. **पक्ष :** आ. 2·57 मधे दोन वर्तुळे परस्परांना P व Q मधे छेदतात. P मधून जाणारी वृत्तछेदिका त्या वर्तुळांना अनुक्रमे A आणि B बिंदूत छेदते. A व B बिंदूत काढलेल्या त्या वर्तुळांच्या स्पर्शिका T मध्ये छेदतात.

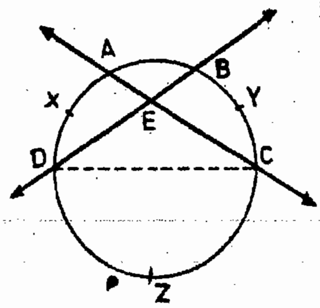
साध्य : A, Q, B व T हे बिंदू एका वर्तुळावर आहेत.



आ. 2·57

21. **पक्ष :** रेषा AC व रेषा DB ह्या दोन वृत्तछेदिका E मधे छेदतात. E बिंदू वर्तुळाच्या अंतर्भागात आहे (आ. 2·58).

साध्य : $m\angle BEC = \frac{1}{2}[m$ (कंस BYC) $+ m$ (कंस AXD)$]$



आ. 2·58

सिद्धता : रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

$\angle BDC$ व $\angle ACD$ विचारात घ्या.

$m\angle BDC = \frac{1}{2}\ m$ (कंस ——)

$m\angle ACD = \frac{1}{2}\ m$ (कंस ——)

$\therefore m\angle BDC + m\angle ACD = \frac{1}{2}\ m$ (कंस ——) $+ \frac{1}{2}\ m$ (कंस ——)

$= \frac{1}{2}[m$ (कंस ——) $+ m$ (कंस ——)$]$

परंतु बाह्यकोनाच्या प्रमेयावरून,

$m\angle BDC + m\angle ACD = m\angle$—— .

$\therefore m\angle BEC = \frac{1}{2}[m$ (कंस BYC) $+ m$ (कंस AXD)$]$

22. उदा० 21 मधील आकृतीत,

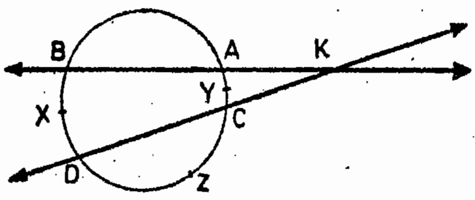
(i) m(कंस BYC) = 40, m(कंस AXD) = 90 तर $m\angle BEC$ = ?

(ii) m(कंस ADB) = 310, m(कंस DZC) = 200 तर $m\angle AED$ = ?

(iii) m(कंस CAD) = 180, $m\angle BEC$ = 57, m (कंस AXD) = ?

23. एका वर्तुळाच्या दोन वृत्तछेदिका वर्तुळाच्या बाहेर छेदत असतील तर त्यांच्यामधील कोनाचे माप त्या कोनाने आंतरखंडित केलेल्या कंसांच्या मापांच्या फरकाच्या निम्मे असते (आ. 2·59).

(सूचना : रेख BC काढा व नंतर $m\angle K = \frac{1}{2}[m$(कंस BXD) $- m$(कंस AYC)$]$ दाखवा.

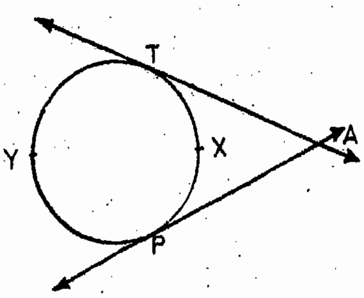


आ. 2·59

24. उदा० 23 मधील आ. 2·59 मध्ये, (i) m(कंस BXD) = 80, m(कंस AYC) = 40, तर $m\angle K$ = ? (ii) m(कंस BXD) = 126, m(कंस AYC) = 18, तर $m\angle K$ = ? (iii) $m\angle K = 28$, m(कंस ABD) = 166 व m(कंस ACB) = 290, तर m(कंस CZD) = ?

25. वर्तुळाला काढलेल्या दोन भिन्न स्पर्शिका अथवा एक वृत्तछेदिका व एक स्पर्शिका वर्तुळाच्या बाह्य भागात छेदत असतील तर त्यांच्यामधील कोनाचे माप त्या कोनाने आंतरखंडित केलेल्या कंसांच्या मापांच्या फरकाच्या निम्मे असते, हे सिद्ध करा.

26.



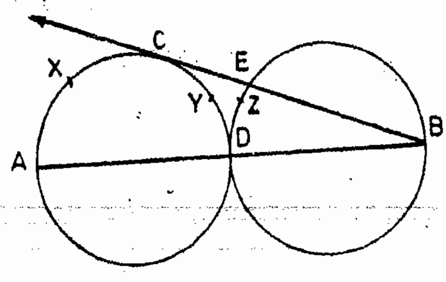
आ. 2·60

आ. 2·60 मध्ये वर्तुळाची स्पर्शिका TA व स्पर्शिका PA, A बिंदूत छेदतात.

(i) m(कंस PXT) = 110 तर $m\angle A$ = ?
(ii) $m\angle A = 74$ तर प्रत्येक आंतरखंडित कंसाचे माप काढा. (iii) कंस TYP चे माप कंस TXP च्या मापाच्या चौपट असेल तर $\angle A$ चे माप किती ?

27. पक्ष : दोन एकरूप वर्तुळे D मधे बाहेरून स्पर्श करतात. रेषा BC ही एका वर्तुळाची C मधे स्पर्शिका आहे (आ. 2·61). रेख AD व रेख DB हे व्यास आहेत.

साध्य : m(कंस AXC) = m(कंस DYC) + m (कंस DZE)

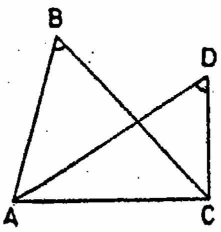


आ. 2·61

(सूचना : उदा० 25 मधील निष्कर्षाचा उपयोग करा.)

28. एका वर्तुळात आंतरलिखित त्रिकोण दिला आहे. त्या त्रिकोणाच्या कोणत्याही कोनाचा दुभाजक त्या कोनाने आंतरखंडित केलेल्या कंसाला दुभागतो हे सिद्ध करा.

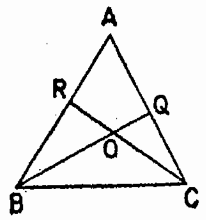
29.



आ. 2·62

आ. 2·62 मध्ये, $\angle ABC \cong \angle ADC$ असेल तर A, B, D व C हे चारही बिंदू एका वर्तुळावर आहेत हे सिद्ध करा.

30. पक्ष : आ. 2·63 मधील $\triangle ABC$ मधे रेख BQ $\perp$ बाजू AC व रेख CR $\perp$ बाजू AB. या दोन लंबांचा छेदनबिंदू O आहे.



आ. 2·63

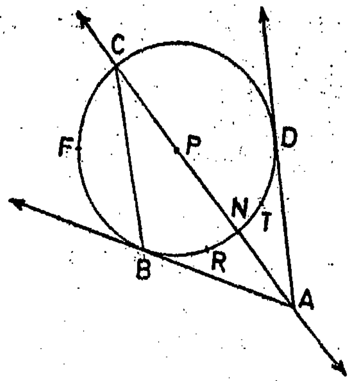
साध्य : □ AQOR व □ BCQR हे चक्रीय आहेत.

स्वाध्याय :

1. केंद्र P असलेल्या वर्तुळाची वृत्तछेदिका रेषा CN, P मधून जाते. या रेषेवर वर्तुळाच्या बाहेर A बिंदू आहे. A मधून रेषा AB व रेषा AD ह्या दोन स्पर्शिका वर्तुळाला काढल्या.

   m(कंस BRN) = m(कंस NTD) = 50 आहे, तर खालील कंसांची व कोनांची मापे काढा.

   (i) m(कंस CFB) (ii) $m\angle DAB$ (iii) $m\angle BCN$ (iv) $m\angle CBA$ (v) $m\angle CAB$



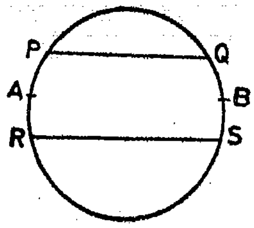
आ. 2·64

2. खालील विधानांपैकी कोणती सत्य व कोणती असत्य आहेत ते ओळखा.

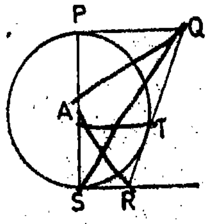
   (i) वर्तुळात आंतरलिखित केलेल्या एका कोनाचे माप 90 असेल तर त्याने खंडित केलेल्या कंसाचे माप 45 राहील. (ii) एकाच वर्तुळात आंतरलिखित केलेले दोन कोन एकरूप असतील तर त्यांनी खंडित केलेले वर्तुळाचे कंस एकरूप असतात. (iii) दोन एककेंद्री वर्तुळांना कमीतकमी एक बिंदू समाईक असतो. (iv) दोन वर्तुळे आतून स्पर्श करीत असतील तर त्यांचे केंद्रबिंदू जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे माप, त्या दोनपैकी कोणत्याही वर्तुळाच्या त्रिज्येपेक्षा लहान असते. (v) दोन भिन्न वर्तुळांचे दोन कंस समान मापाचे असतील तर त्यांच्या संगत जीवा एकरूप असतात.

3. **पक्ष :** आ. 2·65 मधे, m(कंस PAR) = m(कंस QBS)

   साध्य : जीवा PQ ∥ जीवा RS.



आ. 2·65

4. 

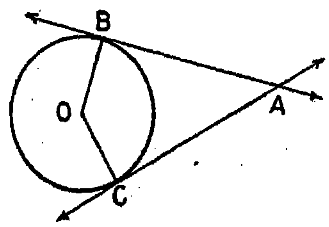
आ. 2·66

   पक्ष : वर्तुळाचा केंद्र A असून आ. 2·66 मधे दाखवल्याप्रमाणे रेख PQ, रेख QR व रेख RS हे अनुक्रमे P, T व S बिंदूत वर्तुळाला स्पर्श करतात.

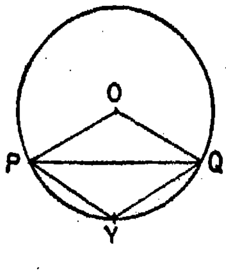
   साध्य : $l(PQ) + l(SR) = l(QR)$

5. **पक्ष :** O केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या दोन स्पर्शरेषा BA व रेषा CA, A मधे छेदतात (आ. 2·67).

   साध्य : □BOCA हा चक्रीय चौकोन आहे.



आ. 2·67

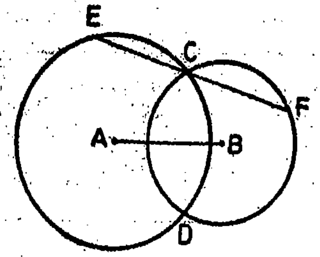
6. 

आ. 2·68

   पक्ष : केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची जीवा PQ आहे (आ. 2·68).

   साध्य : $m\angle POQ = 2(m\angle PQY + m\angle YPQ)$

7\.



आ. 2·69

पक्ष : A आणि B केंद्रे असलेली दोन वर्तुळे C व D मधे छेदतात. C मधून जाणारी एक रेषा वर्तुळांना अनुक्रमे E आणि F मधे छेदते.

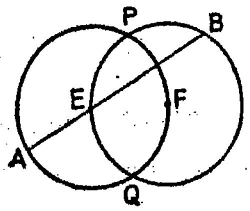
साध्य : $m\angle ADB = m\angle EDF$.

(सूचना : $\triangle ABD$ व $\triangle EDF$ मधे $m\angle CFD = m\angle ABD$ आणि $m\angle CED = m\angle BAD$ दाखवा.)

8\. ABCD हा एक चौरस आहे. B आणि C केंद्रे घेऊन व चौरसाच्या बाजूएवढी त्रिज्या घेऊन काढलेली दोन वर्तुळे चौरसाच्या अंतर्भागात E मधे छेदतात. सिद्ध करा की $m\angle BDE = 30$.

(सूचना : $\triangle BCE$ समभुज आहे आणि $m\angle BDE = \frac{1}{2}\, m\angle ECB = 30$)

9\.

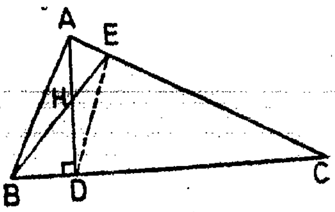


आ. 2·70

पक्ष : आ. 2·70 मधे दाखवल्याप्रमाणे E व F केंद्रे असलेली दोन एकरूप वर्तुळे P व Q मधे छेदतात. प्रत्येक वर्तुळाचा केंद्र दुसऱ्यावर आहे. E मधून जाणारी एक रेषा वर्तुळांना अनुक्रमे A आणि B मधे छेदते.

साध्य : $m\angle PAQ = m\angle PBQ = 60$

10\. $\triangle ABC$ या लघुकोन त्रिकोणात शिरोलंब रेख AD व रेख BE परस्परांना H मधे छेदतात (आ. 2·71).
रेख ED जोडा व खालील प्रश्नांची सकारण उत्तरे द्या. (i) $\angle ABE$ शी एकरूप असणारा कोन कोणता ? (ii) $\angle BED$ शी एकरूप असणारा कोन कोणता ? (iii) $\triangle AHB$ व $\triangle EHD$ यांच्यामधे कोणता संबंध दाखवता येईल ? (iv) कोणते दोन चौकोन चक्रीय आहेत ?

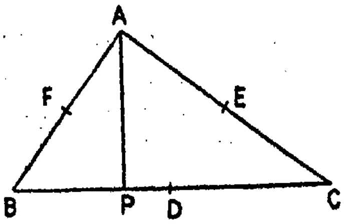


आ. 2·71

11\. **पक्ष :** आ. 2·72 मधे $\triangle ABC$ च्या बाजूंचे D, E, F हे मध्यबिंदू आहेत. रेख AP $\perp$ रेख BC.

साध्य : F, E, P आणि D हे बिंदू एका वर्तुळावर आहेत.

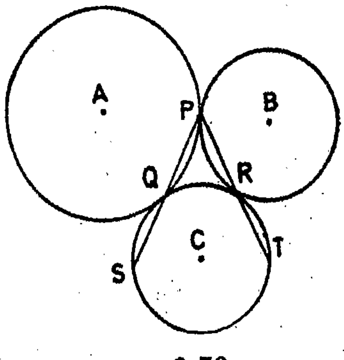
(सूचना : रेख FP, रेख DE व रेख FE काढा.)



आ. 2·72

12\. दोन एकरूप वर्तुळांची केंद्रे अनुक्रमे A आणि B असून ती T मधे बाहेरून स्पर्श करतात. T मधून जाणारी एक रेषा वर्तुळांस अनुक्रमे Q व R मधे छेदते. सिद्ध करा की त्रिज्या AQ $\parallel$ त्रिज्या BR.

13\. **पक्ष :** A, B व C केंद्रे असलेली तीन वर्तुळे परस्परांस अनुक्रमे P, Q व R मधे स्पर्श करतात. किरण PQ व किरण PR हे, C केंद्र असलेल्या वर्तुळाला अनुक्रमे S व T मधे छेदतात (आ. 2·73).

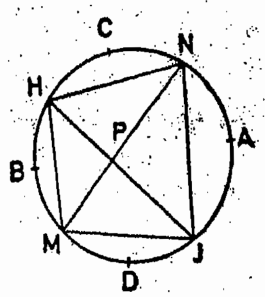


आ. 2·73

साध्य : (i) रेख ST ∥ रेषा AB

(ii) S, C व T एकरेषीय आहेत.

14. आ. 2·74 मधे दिलेल्या माहितीवरून खालील विधानांपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत?



आ. 2·74

(i) $m\angle NPJ = \frac{1}{2}$ [m (कंस NAJ + m (कंस HBM)]

(ii) $m\angle HPN = \frac{1}{2}$ m (कंस HCN)

(iii) $m\angle HMN = m\angle PJN$

(iv) △HPM व △JPN ह्यांचे संगतकोन एकरूप आहेत.

प्रकरण 3 : समरूपता

§ 3·1 भूमितीय आकृत्यांच्या ज्या विविध गुणधर्मांचा आपण आतापर्यंत अभ्यास केला आहे, त्यांत 'एकरूपता' गुणधर्माला फार महत्त्वाचे स्थान आहे. सारख्या धर्तीच्या (सजातीय) दोन भूमितीय आकृती परस्परांवर ठेवल्या आणि त्या एकमेकींशी तंतोतंत जुळल्या तर त्या आकृतींना आपण 'एकरूप आकृती' असे म्हणतो. रेषाखंडांची एकरूपता आपण त्यांच्या लांबींच्या समानतेवरून ठरवली. कोनांची एकरूपता त्यांच्या मापांच्या समानतेवरून आपण ठरवली. तीन किंवा जास्त भुजा असणाऱ्या बहुभुजाकृतींची एकरूपता आपण त्यांच्या संगतभुजांच्या एकरूपतेवर आणि संगतकोनांच्या एकरूपतेवर आधारित ठेवली.

कोणतीही प्रतलीय आकृती व तिच्या प्रतलास समांतर असणाऱ्या सपाट आरशातील तिची प्रतिमा ह्या या अर्थाने 'एकरूप' असतात हे आपल्याला माहीत आहे. एखादे चित्र व त्याच्यासमोर ठेवलेल्या सपाट आरशातील त्याचे प्रतिबिंब ही दोन्ही परस्पर एकरूप असतात. पण याच चित्रासमोर एखादा बाह्यगोल आरसा ठेवला असता मिळणारे प्रतिबिंब, त्या चित्राशी एकरूप असते काय?

एखाद्या व्यक्तीची मूर्ती, त्या व्यक्तीशी या अर्थाने एकरूप असते काय?

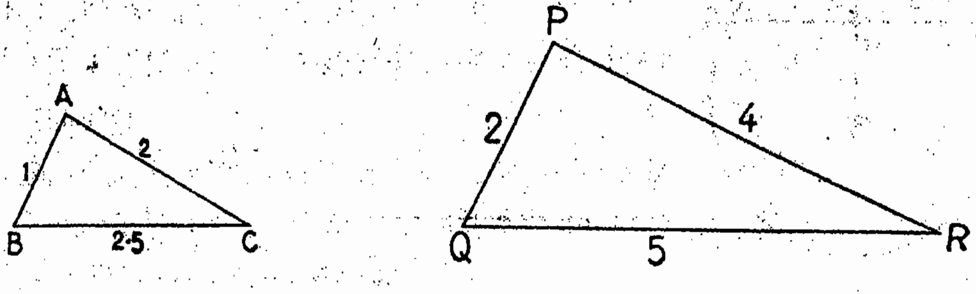
एखादे छायाचित्र व त्याची मोठी केलेली आवृत्ती (enlargement) यांची या दृष्टीने तुलना केल्यास त्यांत आपल्याला एकरूपता आढळते काय?

घराचे किंवा जमिनीचे नकाशे या दृष्टीने पाहा व त्यांची संबंधित घराशी किंवा जमिनीच्या तुकड्याशी तुलना करा. यांत एकरूपता नाही हे तर आपल्याला जाणवतेच, पण तरीही काही बाबतीत त्यांच्यामध्ये साम्य असल्याचेही जाणवते.

वर उल्लेखिलेल्या जोड्यांमध्ये एकरूपतेच्या दृष्टीने उणीव कोठे आहे याचा आता विचार करा.

सर्व तपशील (details) हुबेहूब चित्रित झालेला असतो; फक्त सर्व अंगांच्या लांबी प्रमाणशीरपणे एकतर कमी, किंवा जास्त झालेल्या असतात असे आपल्या अनुभवास येते. हा प्रमाणशीरपणा म्हणजे काय ते पुढील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

उदा० 1. आ. 3·1 पाहा. ABC ⟷ PQR चा विचार करा. या संगतीनुसार, रेख AB ⟷ रेख PQ, रेख BC ⟷ रेख QR, रेख AC ⟷ रेख PR ह्या भुजांच्या संगती मिळतात. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे,



आ. 3·1

$l(AB)=1;\quad l(PQ)=2$

$l(BC)=2{\cdot}5;\quad l(QR)=5$

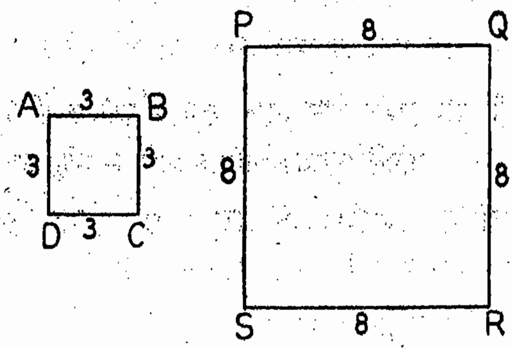
$l(AC)=2;\quad l(PR)=4.$

त्यावरून △PQR ची प्रत्येक भुजा, △ABC मधील संगतभुजेच्या दुप्पट लांब आहे असे आढळते. म्हणजे, $\frac{l(PQ)}{l(AB)}, \frac{l(QR)}{l(BC)}$ व $\frac{l(PR)}{l(AC)}$ ही संगतभुजांची गुणोत्तरे समान आहेत. या प्रत्येक गुणोत्तराची किंमत येथे 2 आहे.

अशा वेळी △ABC व △PQR यांच्या संगतभुजा प्रमाणशीर लांबीच्या आहेत असे आपण म्हणतो. (प्रमाणशीरपणाच्या दृष्टीने, या प्रत्येक गुणोत्तराची किंमत किती आहे याला महत्त्व नाही, तर ही गुणोत्तरे समान असणे याला महत्त्व आहे.)

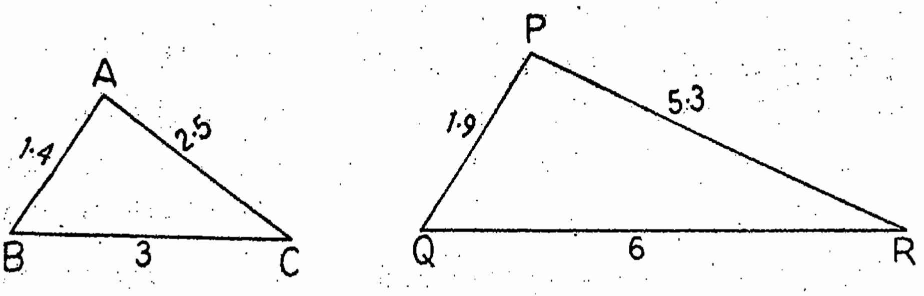
उदा० 2. आ. 3·2 मध्ये, □ABCD व □PQRS हे दोन्ही चौरस आहेत.

PQRS ⟷ ABCD चा विचार करा. या संगतीनुसार संगतभुजांच्या लांबीची गुणोत्तरे, $\frac{l(PQ)}{l(AB)}, \frac{l(QR)}{l(BC)}, \frac{l(RS)}{l(CD)}$ व $\frac{l(PS)}{l(AD)}$ ही आहेत. रेषाखंडांच्या दिलेल्या लांबीवरून, या प्रत्येक गुणोत्तराची किंमत $\frac{8}{3}$ हीच असल्याचे दिसून येते. म्हणजे ही सर्व गुणोत्तरे समान आहेत.



आ. 3·2

येथे आपल्याला □ABCD व □PQRS यांच्या संगतभुजा प्रमाणशीर लांबीच्या आहेत असे म्हणता येते.



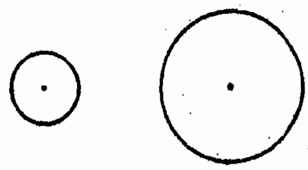
आ. 3·3

उदा० 3. मागील पानावरील आ. 3·3 मधील $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$ बाबत $ABC \longleftrightarrow PQR$ चा विचार करा. रेख QR ही तिच्या संगतभुजेच्या (म्हणजे, रेख BC च्या) दुप्पट लांब आहे, पण $\triangle PQR$ च्या इतर भुजा मात्र $\triangle ABC$ मधील त्यांच्या संगतभुजांच्या दुप्पट लांबीच्या नाहीत. म्हणजे, $\frac{l(PQ)}{l(AB)}, \frac{l(QR)}{l(BC)}$ व $\frac{l(PR)}{l(AC)}$ ही सर्व गुणोत्तरे समान नाहीत. $\left(\frac{l(PQ)}{l(AB)} = \frac{1{\cdot}9}{1{\cdot}4}, \frac{l(QR)}{l(BC)} = \frac{6}{3}, \frac{l(PR)}{l(AC)} = \frac{5{\cdot}3}{2{\cdot}5}.\right)$

अर्थात येथे $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$ यांच्या संगतभुजांच्या लांबी **प्रमाणशीर नाहीत** असे आपण म्हणतो.

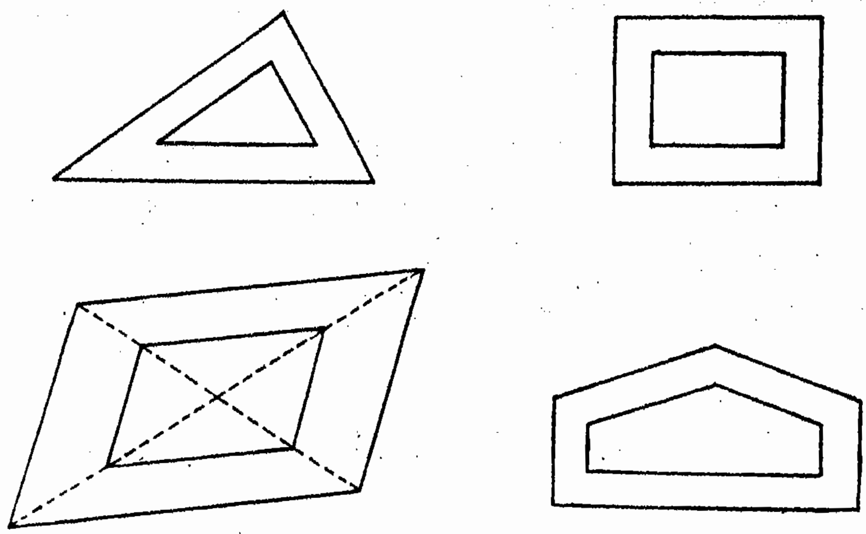
§ 3·2 दोन आकृती आकाराने लहानमोठ्या असल्या तरी त्यांची ठेवण (shape) जर सारख्या धाटणीची असेल तर त्या आकृत्यांना 'समरूप आकृती' किंवा 'सरूप आकृती' (similar figures) म्हणतात.

या दृष्टीने कोणतीही दोन वर्तुळे नेहमीच 'समरूप' असतात (आ. 3·4 पाहा). अशा समरूपतेमधे आपल्याला फारसे स्वारस्य नाही.



आ. 3·4

आपण आता बहुभुजाकृतींची समरूपता कशी असते ते पाहू. आ. 3·5 मधे समरूप बहुभुजाकृतींच्या काही जोड्या दाखवल्या आहेत.



आ. 3·5

या आकृतींवरून आपल्या हे लक्षात येते की, समरूप असणाऱ्या दोन बहुभुजाकृतींच्या शिरोबिंदूंची अशी एक, एकास-एक संगती असते की तदनुसार त्यांचे संगतकोन एकरूप असतात व संगतभुजा प्रमाणशीर लांबीच्या असतात. (म्हणजे संगतभुजांच्या लांबीची गुणोत्तरे समान असतात.)

§ 3·3 आपल्याला विशेषकरून त्रिकोणाच्या समरूपतेचा विचार करायचा आहे. या संबंधाची व्याख्या आपण पुढीलप्रमाणे करू.

व्याख्या : $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ यांच्या शिरोबिंदूंची $ABC \longleftrightarrow DEF$ ही एक संगती दिली असून $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ आणि $\frac{l(AB)}{l(DE)} = \frac{l(BC)}{l(EF)} = \frac{l(AC)}{l(DF)}$ असेल तर दिलेली $ABC \longleftrightarrow DEF$ ही संगती, समरूपता असते.

ही व्याख्या कोणत्याही त्रिकोणाचा नामनिर्देश न करता, शब्दांमधे पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

'दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमधे असलेल्या एखादया संगतीनुसार होणारे संगतकोन जर एकरूप असतील आणि संगतभुजा जर प्रमाणशीर लांबींच्या असतील तर ती संगती त्या त्रिकोणांची समरूपता आहे असे म्हणतात.'

समरूपतेची वर दिलेली व्याख्या ही एकरूपतेच्या व्याख्येशी बऱ्याच अंशी मिळतीजुळती आहे हे आपल्या सहज लक्षात येते. तेव्हा संगतकोन व संगतभुजा म्हणजे काय हे समजण्यास अडचण जाऊ नये. संगतकोनांची एकरूपता ही अट दोन्ही संबंधात आहेच. त्रिकोणांच्या एकरूपतेसाठी त्यांच्या संगतभुजांची एकरूपता हवी होती. पण त्रिकोणांच्या समरूपतेसाठी मात्र त्यांच्या संगतभुजांच्या लांबींची फक्त प्रमाणबद्धता हवी आहे.

संगतभुजांच्या लांबी जेव्हा प्रमाणशीर असतात, तेव्हा त्या संगतभुजा प्रमाणात आहेत असे म्हणण्याची प्रथा आहे.

§ 3·4 समरूपता दाखवण्यासाठी $\sim$ हे चिन्ह वापरतात. उदा., $ABC \longleftrightarrow DEF$ ही संगती जर समरूपता असेल तर आपण $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ असे लिहितो. ($\triangle ABC$ समरूप $\triangle DEF$ असे वाचतो.)

उदा० : $\triangle PQR \sim \triangle MNT$ याचा अर्थ, $\angle P \cong \angle M$, $\angle Q \cong \angle N$, $\angle R \cong \angle T$ आहे व $\frac{l(PQ)}{l(MN)} = \frac{l(QR)}{l(NT)} = \frac{l(PR)}{l(MT)}$ हेदेखील आहे.

§ 3·5 **प्रश्न :**

1. त्रिकोणांच्या समरूपतेच्या व्याख्येची तुलना त्रिकोणांच्या एकरूपतेच्या व्याख्येशी करा व या दोन संबंधांतील फरक स्पष्ट करा.
2. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ असल्यास $\frac{l(AB)}{l(DE)}, \frac{l(BC)}{l(EF)}$ व $\frac{l(AC)}{l(DF)}$ यांच्या किमती सांगा.
3. एकरूप त्रिकोणांच्या संगतभुजा प्रमाणात असतात हे खरे आहे काय?
4. दोन त्रिकोण एकरूप असल्यास, ते समरूप आहेत असे म्हणता येईल काय?
5. $\triangle MNP \sim \triangle ABD$, तर पुढील विधाने त्यांतील रिकाम्या जागी योग्य माहिती लिहून पूर्ण करा.
   (i) $\angle N \cong \angle$ ——, (ii) $\angle P \cong \angle$ ——, (iii) $\angle A \cong \angle$ ——,
   (iv) $\frac{l(MN)}{l(AB)}, \frac{l(—)}{l(AD)}$ व $\frac{l(NP)}{l(—)}$ ही गुणोत्तरे समान आहेत.
6. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, तर पुढील विधाने त्यांतील रिकाम्या जागी योग्य माहिती लिहून पूर्ण करा.
   (i) $\angle$ —— $\cong \angle E$, (ii) $\angle C \cong \angle$ ——, (iii) $\angle A \cong \angle$ ——, (iv) $\frac{l(AB)}{l(DE)}$, $\frac{l(BC)}{l(EF)}$ व $\frac{l(AC)}{l(DF)}$ ही गुणोत्तरे —— असून या प्रत्येक गुणोत्तराची किंमत —— आहे.

§ 3·6 आतापर्यंतच्या विवेचनावरून, समरूपतेच्या चर्चेसाठी संगतभुजांच्या लांबींच्या प्रमाणशीरपणाची कल्पना अत्यावश्यक आहे हे आपल्या लक्षात आले आहे. समरूपतेचा पुढील अभ्यास करण्याअगोदर 'प्रमाण' विषयक गुणधर्मांची माहिती करून घेणे उपयुक्त ठरेल. ही माहिती तुमच्या बीजगणिताच्या पुस्तकात विस्ताराने मिळू शकेल.

'प्रमाण' विषयक चर्चेसाठी आपण धन वास्तव संख्या घेत असतो. भूमितीत रेषाखंडांच्या लांबी ह्या धन वास्तव संख्या असतात. तेव्हा विविध रेषाखंडांच्या लांबी प्रमाणात केव्हा असतात हे पाहाणे मनोरंजक ठरणार आहे. त्रिकोणांची क्षेत्रफळेदेखील आपण धन वास्तव संख्यांनीच दाखवतो. तेव्हा, क्वचित प्रसंगी त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे सुद्धा 'प्रमाण' असू शकते. त्याचाही विचार आपल्याला करायचा आहे. भूमितीय आकृतींच्या अभ्यासात प्रमाणाचा संबंध कसा येतो हे सांगणारी काही प्रमेये आता आपण अभ्यासणार आहोत.

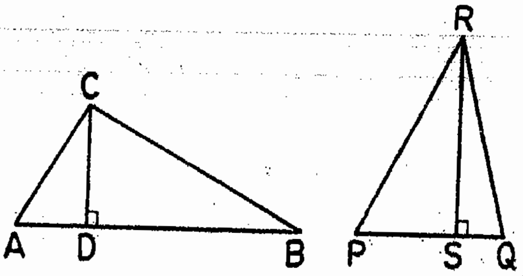
§ 3·7 ■ प्रमेय :

कोणत्याही दोन त्रिकोणांची क्षेत्रफळे ही त्या त्रिकोणांच्या, पाया व उंची यांच्या गुणाकारांच्या प्रमाणात असतात.

a, b, c, d ह्या चार संख्या प्रमाणात आहेत असे जेव्हा आपण म्हणतो तेव्हा आपण $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ हेच म्हणत असतो. या दृष्टीने, वरील प्रमेयाचे विधान आपल्याला असे मांडता येईल :

कोणत्याही दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्या त्रिकोणांच्या पाया व उंची यांच्या गुणाकारांच्या गुणोत्तराबरोबर असते.

पक्ष : △ ABC च्या, रेख AB शी संबंधित शिरोलंब रेख CD हा असून △ PQR च्या रेख PQ शी संबंधित शिरोलंब रेख RS हा आहे (आ. 3·6 पाहा.).



आ. 3·6

साध्य :

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle PQR)} = \frac{l(AB) \times l(CD)}{l(PQ) \times l(RS)}$$

सिद्धता : (1) $A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\, l(AB) \times l(CD)$
(2) $A(\triangle PQR) = \frac{1}{2}\, l(PQ) \times l(RS)$ } क्षेत्रफळाचे सूत्र

(3) $$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle PQR)} = \frac{\frac{1}{2}\, l(AB) \times l(CD)}{\frac{1}{2}\, l(PQ) \times l(RS)} = \frac{l(AB) \times l(CD)}{l(PQ) \times l(RS)}.$$

§ 3·8 परिच्छेद 3·7 मधे मांडलेल्या प्रमेयाची मांडणी पुढीलप्रमाणेही करता येते.

कोणत्याही दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे, त्यांच्या पायांचे गुणोत्तर व त्या पायांवरील शिरोलंबांच्या लांबींचे गुणोत्तर यांच्या गुणाकाराबरोबर असते.

म्हणजे, $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle PQR)} = \frac{l(AB)}{l(PQ)} \times \frac{l(CD)}{l(RS)}$ ... (आ. 3·6 पाहा)

§ 3·9 प्रश्न :

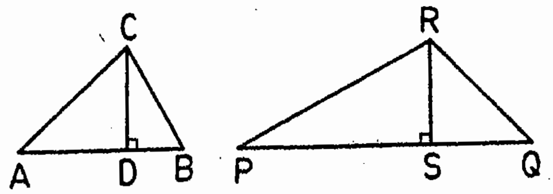
1. दोन त्रिकोणांपैकी पहिल्याचा पाया 10 व उंची 3 असून दुसऱ्याचे पाया व उंची अनुक्रमे 8 व 5 आहेत. तर त्या पहिल्या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाशी गुणोत्तर काय असावे ?
2. $\triangle DBC$ मध्ये, $l(DC)=8$ असून B पासून काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी 7 आहे. $\triangle PQR$ मध्ये, $l(PQ)=10$ असून R पासून काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी 7 आहे. A_1 आणि A_2 ही अनुक्रमे $\triangle DBC$ आणि $\triangle PQR$ यांची क्षेत्रफळे आहेत, तर $\frac{A_1}{A_2}$ ची किंमत काढा.
3. दोन त्रिकोण समान उंचीचे आहेत. त्यांच्या संबंधित पायांच्या लांबींचे गुणोत्तर $\frac{4}{3}$ आहे, तर त्या त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर किती ?
4. $\triangle MNT$ व $\triangle QRS$ यांमध्ये, $l(MN)=l(QR)$. T पासून काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी 5 असून, S पासून काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी 9 आहे, तर $\frac{A(\triangle MNT)}{A(\triangle QRS)}$ या गुणोत्तराची किंमत काढा.
5. $\triangle SRT$ चा पाया व उंची हे अनुक्रमे b_1 व h_1 असून, $\triangle HMN$ चा पाया व उंची हे अनुक्रमे b_2 व h_2 आहेत. $b_1=b_2$ आहे; आणि $\frac{h_1}{h_2}=\frac{5}{8}$ आहे, तर $\frac{A(\triangle SRT)}{A(\triangle HMN)}$ ची किंमत काढा.
6. $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ यांत $l(AC)=l(EF)$. रेख BM हा B पासून रेषा AC वर M येथे लंब आहे. रेख DN हा D पासून रेषा EF वर N येथे लंब आहे. $\triangle ABC$ चे क्षेत्रफळ 20 चौसेमी असून $\triangle DEF$ चे क्षेत्रफळ 30 चौसेमी आहे. तर $\frac{l(DN)}{l(BM)}$ ची किंमत किती ?
7. समान क्षेत्रफळांच्या दोन त्रिकोणांपैकी पहिल्याचा पाया दुसऱ्याच्या पायाच्या दुप्पट आहे. तर पहिल्याची संबंधित उंची दुसऱ्याच्या संबंधित उंचीच्या किती पट असेल ?
8. 15 चौसेमी क्षेत्रफळ असणाऱ्या त्रिकोणाची एक उंची, 20 चौसेमी क्षेत्रफळ असणाऱ्या त्रिकोणाच्या एका उंचीशी समान आहे. तर त्यांच्या संबंधित पायांचे गुणोत्तर काढा.

§ 3·10 परिच्छेद 3·7 मधे चर्चिलेल्या प्रमेयाचे अत्यंत सोपे पण उपयुक्त असे काही निष्कर्ष उपप्रमेयांच्या रूपाने पुढे दिले आहेत.

- **उपप्रमेय 1 :**

समान उंचीच्या दोन त्रिकोणांची क्षेत्रफळे, त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात असतात.

पक्ष : $\triangle ABC$ च्या रेख AB शी संबंधित शिरोलंब, रेख CD असून $\triangle PQR$ च्या रेख PQ शी संबंधित शिरोलंब रेख RS आहे. $l(CD)=l(RS)$ (आ. 3·7 पाहा).



आ. 3·7

साध्य : $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle PQR)} = \frac{l(AB)}{l(PQ)}$

सिद्धता : $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle PQR)} = \frac{l(AB) \times l(CD)}{l(PQ) \times l(RS)}$ ... (प्रमेय)

$= \frac{l(AB)}{l(PQ)} \times \frac{l(CD)}{l(RS)}$

$= \frac{l(AB)}{l(PQ)} \times 1$ ... ($\because l(CD) = l(RS)$)

$= \frac{l(AB)}{l(PQ)}$.

■ **उपप्रमेय 2 :**

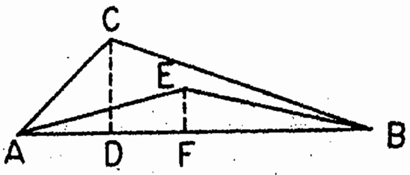
समान लांबीच्या पायांचे दोन त्रिकोण घेतल्यास, त्यांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगतउंचींच्या प्रमाणात असतात.

(या विधानाची सिद्धता तुम्ही लिहून पाहा.)

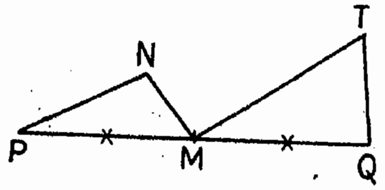
§ 3·11 या प्रकरणात पाया, भुजा, कर्ण, उंची, भुजेचा खंड इ. शब्दप्रयोग आपण दोन अर्थांनी वापरीत आहोत. एक अर्थ, 'रेषाखंड' हा आहे व दुसरा अर्थ 'संबंधित रेषाखंडाची लांबी' असा आहे. तेव्हा, 'क्षेत्रफळे पायांच्या लांबींच्या प्रमाणात आहेत' असे म्हणण्याऐवजी 'क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात आहेत' असे आपल्याला म्हणता येते. तसेच, 'समान लांबीच्या पायांचे त्रिकोण' असे म्हणण्याऐवजी 'समान पायांचे त्रिकोण' असे आवश्यक त्या प्रसंगी आपल्याला म्हणता येईल.

§ 3·12 परिच्छेद 3·10 मधे आपण जी दोन उपप्रमेये पाहिली त्यांत 'समान उंचीचे त्रिकोण' व 'समान लांबीच्या पायांचे त्रिकोण' असे उल्लेख आले आहेत. असे त्रिकोण ज्या अनेक प्रकारे उद्भवू शकतात त्यांपैकी काही प्रकारांची उदाहरणे पुढे दिली आहेत.

1. **समान लांबीच्या पायांचे** (पण भिन्न उंचींचे) **त्रिकोण** (आ. 3.8 पाहा).
   येथे $\triangle ABC$ व $\triangle ABE$ हे समान लांबीच्या पायाचे पण भिन्न उंचीचे त्रिकोण आहेत.
   आ. 3·9 मधे रेख PQ चा M हा मध्यबिंदू आहे. येथे $\triangle PMN$ व $\triangle MQT$ हेदेखील वरील प्रकारचे त्रिकोण आहेत.

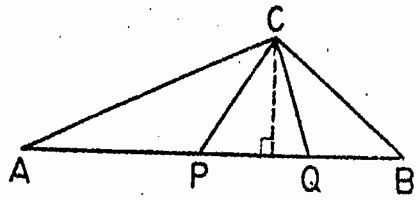


आ. 3·8



आ. 3·9

2. **समान उंचीचे** (पण असमान पायांचे) **त्रिकोण** (आ. 3·10 पाहा).
   $\triangle APC$ चा रेख AP हा पाया व $\triangle QBC$ चा रेख QB हा पाया हे कमीजास्त लांबीचे आहेत. पण दोन्ही त्रिकोणांच्या, या पायाशी संबंधित उंची मात्र समान आहेत.

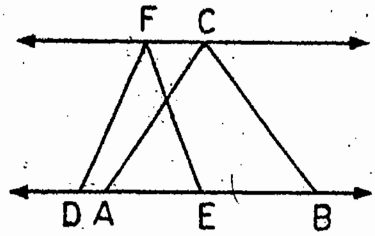


आ. 3·10

याच आकृतीत, $\triangle AQC$ ची रेख AQ शी संबंधित उंची ही $\triangle PQC$ च्या रेख PQ शी संबंधित उंचीशी समान आहे हेही आपल्या लक्षात येईल. असे होण्याची दोन महत्त्वाची कारणे म्हणजे (i) रेख AQ व रेख PQ हे त्यांचे पाये एका रेषेत आहेत आणि (ii) C हा दोन्ही त्रिकोणांचा समाईक शिरोबिंदू आहे.

§ 3·13 प्रश्न :

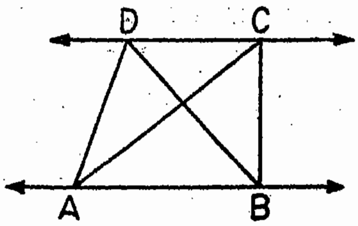
1. बाजूला काही आकृती व त्यांतील त्रिकोणांची नावे दिली आहेत. ते त्रिकोण (i) समान पायाचे, भिन्न उंचीचे, (ii) समान उंचीचे, भिन्न पायांचे व (iii) समान पायांचे, समान उंचीचे यांपैकी कोणत्या प्रकारचे आहेत ते ओळखा.



आ. 3·11

(a) रेषा DB ∥ रेषा FC.

$\triangle DEF$ व $\triangle ABC$ यांची माहिती सांगा (आ. 3·11).



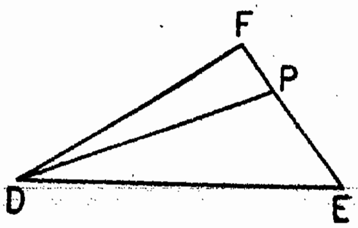
आ. 3·12

(b) रेषा AB ∥ रेषा DC

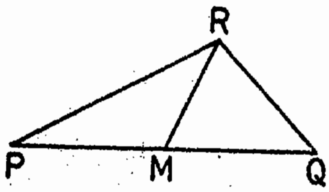
$\triangle ABC$ व $\triangle ADB$ यांची माहिती सांगा (आ. 3·12).

(c) $\triangle DEF$ व $\triangle DPE$ यांची माहिती सांगा.

आ. 3·13 पाहा.



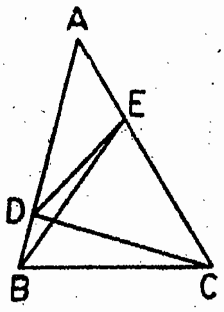
आ. 3·13



आ. 3·14

(d) M हा रेख PQ चा मध्यबिंदू आहे.

$\triangle RPM$ व $\triangle QRM$ यांची माहिती सांगा.



आ. 3·15

2. आ. 3·15 च्या संदर्भाने खाली दिलेल्या विधानांतील रिकाम्या जागी योग्य माहिती भरा.

(i) $\dfrac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle ADC)} = \dfrac{l(AE)}{\text{—}}$

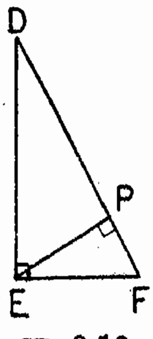
(ii) $\dfrac{A(\triangle AED)}{A(\triangle DEB)} = \dfrac{\text{—}}{l(DB)}$, कारण ते समाना—चे त्रिकोण आहेत.

3. $\triangle DEF$ मध्ये, $m\angle DEF = 90$,

रेख EP ⊥ रेख DF (P वर) (आ. 3·16 पाहा).

यावरून सिद्ध करा की,

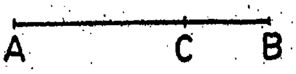
$$\frac{l(EF)}{l(EP)} = \frac{l(DF)}{l(DE)}$$



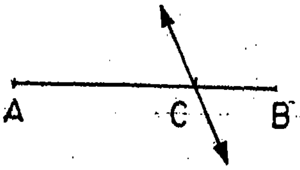
आ. 3·16

§ 3·14 विभागणे :

जर C हा A व B यांच्या दरम्यानचा बिंदू असेल तर C हा समाईक अंत्यबिंदू असणारे रेख AC व रेख BC असे दोन रेषाखंड आपल्याला मिळतात. अशा वेळी C बिंदूने रेख AB ला रेख AC व रेख BC या रेषाखंडांमधे विभागले असे आपण म्हणतो.



आ. 3·17

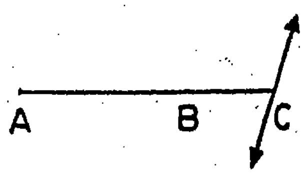


आ. 3·18

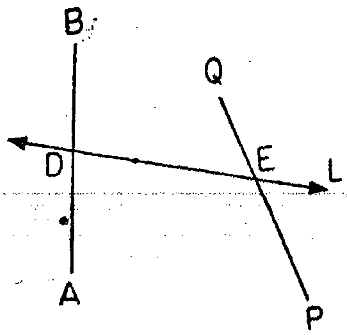
एखादी रेषा (किंवा रेषाखंड किंवा किरण) जर C या विभाजक बिंदूतून जात असेल तर त्या रेषेने (किंवा रेषाखंडाने किंवा किरणाने) रेख AB चे केलेले खंड म्हणजे रेख AC व रेख BC होत (आ. 3·18 पाहा.).

A–C–B असताना, वर वर्णन केल्याप्रमाणे झालेल्या रेख AB च्या विभाजनाला त्याचे अंतर्विभाजन म्हणतात.

जर B हा A व C यांच्या दरम्यानचा बिंदू असेल (आ. 3·19 पाहा) तर (किंवा A – C – B असेल तरीही) C हा समाईक अंत्यबिंदू असणारे दोन रेषाखंड, रेख AC व रेख BC आपल्याला मिळतातच. हे रेख AB चे C बिंदूने (किंवा त्यातून जाणाऱ्या रेषा, किरण वा रेषाखंडाने) **बहिर्विभाजन** करून दिलेले रेषाखंड आहेत असे म्हणतात.



आ. 3·19



आ. 3·20

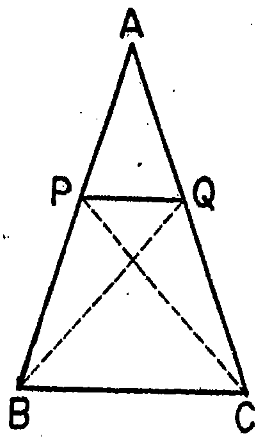
कधीकधी एकच रेषा दोन रेषाखंडांनासुद्धा विभागू शकते. आ. 3·20 मधे, L रेषा, रेख AB व रेख PQ या दोहोंसही विभागते आणि त्यांचे अनुक्रमे रेख AD व रेख BD आणि रेख PE व रेख QE असे खंड पाडते.

§ 3·15 ▪ प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय (Basic Proportionality Theorem) :

त्रिकोणाच्या एका भुजेला समांतर असणारी रेषा त्याच्या उरलेल्या दोन भुजांना भिन्न बिंदूंत छेदत असेल तर ती रेषा त्या भुजांना प्रमाणात विभागते.

पुनःकथन

आ. 3·21 मधे दाखवल्याप्रमाणे, △ABC च्या रेख BC ला समांतर असणारी एक रेषा रेख AB ला P मधे आणि रेख AC ला Q मधे छेदत असेल तर $\dfrac{l(AP)}{l(PB)} = \dfrac{l(AQ)}{l(QC)}$ असते.



आ. 3·21

पक्ष : P हा रेख AB चा एक बिंदू असून Q हा रेख AC चा एक बिंदू आहे. P ≠ Q. रेषा PQ ∥ रेख BC.

साध्य : $\dfrac{l(AP)}{l(BP)} = \dfrac{l(AQ)}{l(CQ)}$.

सिद्धता : Q हा समाईक शिरोबिंदू असल्यामुळे आणि पाया रेख AP व रेख BP हे एकाच रेषेत असल्यामुळे $\triangle APQ$ व $\triangle BPQ$ हे **समान उंचीचे** होतात. अशाच कारणाने, $\triangle APQ$ व $\triangle CPQ$ हे देखील समान उंचीचे होतात.

$\therefore$ प्रमाणविषयक प्रमेयानुसार, $\dfrac{A(\triangle APQ)}{A(\triangle BPQ)} = \dfrac{l(AP)}{l(BP)}$ ... (I)

आणि $\dfrac{A(\triangle APQ)}{A(\triangle CPQ)} = \dfrac{l(AQ)}{l(CQ)}$ ... (II)

आता, $\triangle BPQ$ व $\triangle CPQ$ यांना रेख PQ ही समाईक पाया असून रेख PQ $\parallel$ रेख BC.

त्यामुळे, रेख PQ ह्या समाईक पायाच्या संदर्भात हे दोन्ही त्रिकोण **समान उंचीचे** ठरतात.

$\therefore A(\triangle BPQ) = A(\triangle CPQ)$ ... (III)

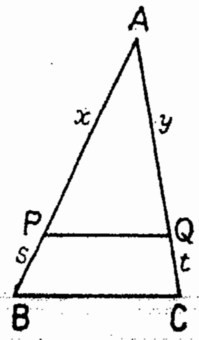
$\therefore \dfrac{A(\triangle APQ)}{A(\triangle BPQ)} = \dfrac{A(\triangle APQ)}{A(\triangle CPQ)}$

$\therefore$ विधाने I व II वरून, $\dfrac{l(AP)}{l(BP)} = \dfrac{l(AQ)}{l(CQ)}$

§ 3·16 प्रश्न :

1. आ. 3·22 मध्ये, रेख PQ $\parallel$ रेख BC. या आकृतीच्या आधारे पुढील विधानातील रिकाम्या जागा भरा.

   (i) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\dots}{\dots}$ (ii) जर $x=15$, $s=5$ व $t=3$ तर $y=$ ——

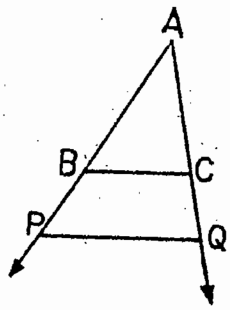


आ. 3·22

2. प्रश्न 1 च्या आकृतीवरून सिद्ध करा की, $\dfrac{l(AP)}{l(AB)} = \dfrac{l(AQ)}{l(AC)}$.

3. आ. 3·23 मध्ये $\triangle ABC$ दिला असून, किरण BA च्या विरुद्ध किरणावर P बिंदू आणि किरण CA च्या विरुद्ध किरणावर Q बिंदू हे असे आहेत की, रेख PQ $\parallel$ रेख BC. तर सिद्ध करा की,

   $\dfrac{l(AP)}{l(AB)} = \dfrac{l(AQ)}{l(AC)}$.

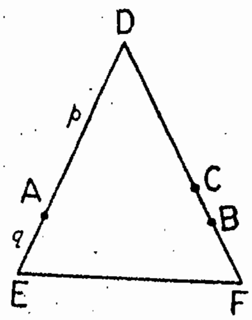


आ. 3·23

4. आ. 3·24 मध्ये, $l(DA)=p$ व $l(EA)=q$. रेख DF मध्ये C व B हे बिंदू असे आहेत की,

   $\dfrac{l(DB)}{l(FB)} = \dfrac{p}{q}$ आणि $\dfrac{l(DC)}{l(FC)} = \dfrac{p}{q}$.

   तर (i) C = B व (ii) C $\neq$ B यांपैकी कोणते विधान खरे आहे ! तुमच्या उत्तराची कारणे दया.



आ. 3·24

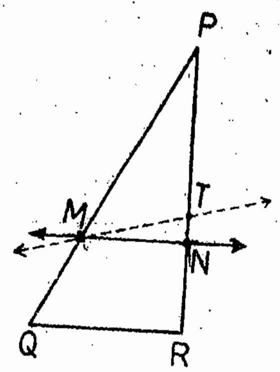
§ 3·17 ■ प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास :

एखादी रेषा जर त्रिकोणाच्या दोन भुजांना भिन्न बिंदूंमध्ये छेदून प्रमाणात विभागत असेल तर ती रेषा उरलेल्या भुजेला समांतर असते.

पक्ष : एक रेषा $\triangle PQR$ च्या रेख PQ ला M मधे व रेख PR ला N मधे छेदते. $(M \neq N)$ $\frac{l(PM)}{l(QM)} = \frac{l(PN)}{l(RN)}$

(आ. 3·25 पाहा).

साध्य : रेषा MN $\parallel$ रेख QR.



आ. 3·25

सिद्धता : रेषा QR ला समांतर असणारी व M या बिंदूतून जाणारी एक व एकच रेषा असते. ती रेषा MN हीच आहे हे आपल्याला सिद्ध करायचे आहे.

जर रेषा MN ही, रेषा QR ला समांतर नाही असे मानले तर M मधून जाणारी दुसरी कोणती तरी रेषा, रेषा QR ला समांतर असेल. ती रेषा, रेषा PR ला जेथे छेदते त्या बिंदूला आपण T हे नाव देऊ. (दोन समांतर रेषांपैकी एकीस छेदणारी रेषा दुसरीसही छेदते, कारण, छेदत नाही असे मानल्यास एका रेषेला एका बाह्यबिंदूतून दोन भिन्न रेषा समांतर असतात असे मानावे लागेल आणि हे तर समांतररेषा गृहीतकाशी विसंगत आहे.)

रेषा MT $\parallel$ रेख QR हे आता आपण गृहीत मानले आहे. अर्थात रेख QR हा रेषा MT ला छेदू शकत नाही.

$\therefore$ Q व R हे बिंदू रेषा MT च्या एकाच अंगास असतील. M हा P व Q या बिंदूंच्या दरम्यान असल्यामुळे M मधून जाणाऱ्या रेषा MT च्या विरुद्ध अंगास P व Q हे बिंदू असले पाहिजेत. म्हणजे P व R हेदेखील, रेषा MT च्या विरुद्ध अंगास असले पाहिजेत.

$\therefore$ रेषा MT व रेषा PR यांचा छेदनबिंदू T हा P व R यांच्या दरम्यान असला पाहिजे.

त्यामुळे T हा, रेख RP चा बिंदू ठरतो.

आता, $\triangle PQR$ मध्ये, रेख MT $\parallel$ रेख QR आहे.

$$\therefore \frac{l(PM)}{l(QM)} = \frac{l(PT)}{l(RT)} \qquad \text{...(प्रमू. प्रमेय)}$$

$$\text{पण} \quad \frac{l(PM)}{l(QM)} = \frac{l(PN)}{l(RN)} \qquad \text{...(पक्ष)}$$

$$\therefore \frac{l(PT)}{l(RT)} = \frac{l(PN)}{l(RN)}$$

$$\therefore \frac{l(PT)}{l(RT)} + 1 = \frac{l(PN)}{l(RN)} + 1$$

$$\therefore \frac{l(PT)+l(RT)}{l(RT)}=\frac{l(PN)+l(RN)}{l(RN)}$$

$$\therefore \frac{l(PR)}{l(RT)}=\frac{l(PR)}{l(RN)} \qquad \ldots\{P-T-R \text{ व } P-N-R.\}$$

$$\therefore \frac{1}{l(RT)}=\frac{1}{l(RN)}$$

$$\therefore l(RT)=l(RN).$$

याप्रमाणे T व N हे दोन्ही बिंदू किरण RP वर असून ते, अंत्यबिंदू R पासून समदूर आहेत.

∴ T = N ...(बिंदूस्थापना प्रमेय)

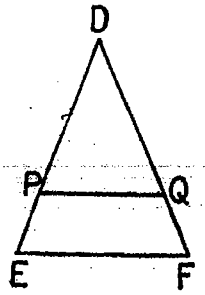
अर्थात त्यामुळे रेषा MT = रेषा MN.

पण रेषा MT ही, रेषा MN पासून भिन्न आहे असे आपण सुरुवातीस गृहीत धरले होते. तेव्हा, ही विसंगती निर्माण झाली.

म्हणून, रेख QR ला समांतर असणारी व M मधून जाणारी रेषा, रेषा MN हून वेगळी आहे असे **मानता येणार नाही.**

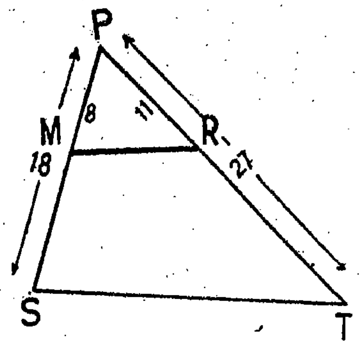
∴ रेषा MN ∥ रेख QR.

§ 3·18 प्रश्न :



आ. 3·26

1. आ. 3·26 च्या संदर्भात, पुढीलपैकी कोणता पक्ष, 'रेख PQ ∥ रेख EF' ची हमी देण्यास पुरेसा आहे ? कोणता अपुरा आहे ?
   (a) $l(DE)=14,\ l(DP)=8,\ l(DF)=7,\ l(DQ)=4.$
   (b) $l(DF)=20,\ l(PE)=12,\ l(QF)=8,\ l(DE)=30.$
   (c) $l(DQ)=2l(QF),\ l(DP)=2l(PE).$
   (d) $l(PD)=l(QD).$
2. सोबतच्या आकृतीत (आ. 3·27) काही रेषाखंडांच्या लांबी दाखवल्या आहेत. त्यांवरून रेख MR ∥ रेख ST असे म्हणता येते काय ?
3. ∠ABC च्या, किरण BC वर K व J आणि किरण BA वर M व N हे बिंदू असे आहेत की, $\frac{l(BJ)}{l(JK)}=\frac{l(BN)}{l(NM)}$, तर एवढ्यावरून रेख NJ ∥ रेख MK म्हणता येईल काय ? की त्यासाठी K व M हे रेषा NJ च्या एकाच अंगास असणे आवश्यक आहे ?

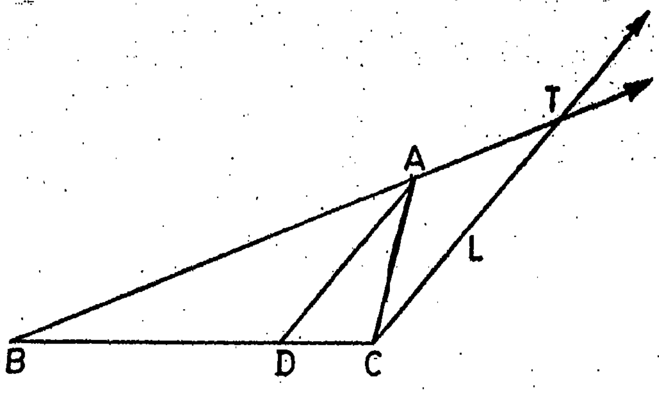


आ. 3·27

§ **3·19** त्रिकोणाच्या दोन भुजांना छेदणारी रेषा तिसऱ्या भुजेला समांतर असणे आणि त्या रेषेमुळे त्या दोन भुजा प्रमाणात विभागल्या जाणे ह्या दोन गोष्टी पूर्णतया परस्परनिगडित आहेत हे मागील दोन प्रमेयांवरून स्पष्ट झाले. त्रिकोणामध्ये, प्रमाणासंबंधी आणखी ज्या परिस्थिती उद्‌भवू शकतात त्यांपैकी काहींची कल्पना पुढील परिच्छेदातील सोडवलेल्या उदाहरणांवरून येईल.

§ 3·20 सोडवलेली उदाहरणे :

1. $\triangle ABC$ च्या $\angle A$ चा दुभाजक, रेख BC ला D बिंदूत छेदतो (आ. 3·28).
तर सिद्ध करा की,
$$\frac{l(BD)}{l(DC)}=\frac{l(BA)}{l(CA)}.$$



आ. 3·28

सिद्धता : C मधून जाणारी व रेषा AD ला समांतर असणारी रेषा काढा. ती, रेषा BA ला जेथे छेदते तेथे T नाव द्या.

B व C हे, रेषा AD च्या विरुद्ध अंगास आहेत व T व C हे, रेषा AD च्या एकाच अंगास आहेत. (म्हणून B व T हे, रेषा AD च्या विरुद्ध अंगास आहेत.) अर्थात A हा B व T यांच्या दरम्यान आहे.

आता, रेषा DA $\|$ रेषा CT

$\therefore \angle BAD \cong \angle ATC$ ... (संगतकोन)

व $\angle DAC \cong \angle ACT$ ... (व्युत्क्रमकोन)

पण, $\angle BAD \cong \angle DAC$ ... (पक्ष)

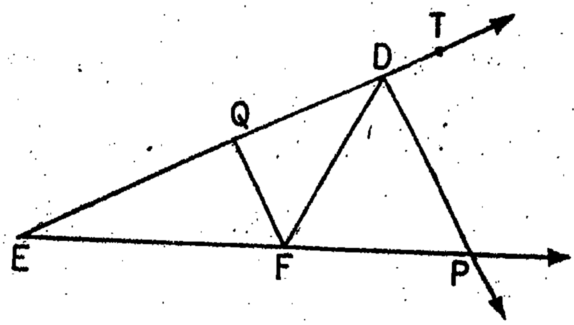
$\therefore \angle ATC \cong \angle ACT$

म्हणून, $\triangle ATC$ मधे, $l(AC)=l(AT)$

आता, $\triangle TBC$ मधे, प्रमू. प्रमेयानुसार, $\dfrac{l(BD)}{l(DC)}=\dfrac{l(BA)}{l(AT)}$.

$$\therefore \frac{l(BD)}{l(DC)}=\frac{l(BA)}{l(AC)}.$$

2. आ. 3·29 मध्ये, $\dfrac{l(PE)}{l(PF)}=\dfrac{l(DE)}{l(DF)}$. तर सिद्ध करा की, किरण DP हा $\angle FDT$ चा दुभाजक आहे.



आ. 3·29

सिद्धता : F मधून जाणारी व रेषा DP ला समांतर असणारी रेषा काढा. ही रेषा, रेषा ED ला छेदते त्या बिंदूला Q नाव द्या.

E–F–P आणि रेख FQ $\|$ रेषा DP असल्यामुळे, E व Q हे बिंदू, रेषा DP च्या एकाच अंगास राहतील हे उघड आहे. म्हणून E–Q–D.

आता, रेख FQ ∥ रेषा DP असल्यामुळे,

$\angle FQD \cong \angle PDT$ ... I. (संगतकोन)

व $\angle QFD \cong \angle FDP$ ... II. (व्युत्क्रमकोन)

तसेच, $\triangle EDP$ मध्ये, $\frac{l(EF)}{l(FP)} = \frac{l(EQ)}{l(QD)}$ ... (प्र. मू. प्र.)

$\therefore \frac{l(EF)}{l(FP)} + 1 = \frac{l(EQ)}{l(QD)} + 1.$

$\therefore \frac{l(EF)+l(FP)}{l(FP)} = \frac{l(EQ)+l(QD)}{l(QD)}$

$\therefore \frac{l(EP)}{l(FP)} = \frac{l(ED)}{l(QD)}$

पण पक्षात दिल्याप्रमाणे, $\frac{l(EP)}{l(FP)} = \frac{l(DE)}{l(DF)}$.

$\therefore \frac{l(ED)}{l(QD)} = \frac{l(DE)}{l(DF)}$

$\therefore l(QD) = l(DF)$

व $\therefore \triangle DQF$ मध्ये, $\angle QFD \cong \angle DQF$ ...III.

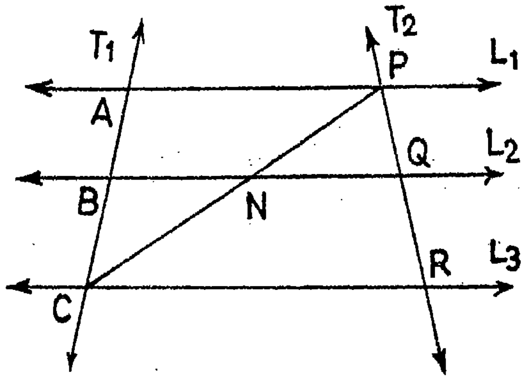
$\therefore \angle PDT \cong \angle FDP$ ...(I, II व III वरून)

$\therefore$ किरण DP हा $\angle FDT$ चा दुभाजक आहे.

3. तीन समांतर रेषांनी एका छेदिकेवर केलेल्या आंतरछेदांचे गुणोत्तर हे त्या रेषांनी दुसऱ्या कोणत्याही छेदिकेवर केलेल्या आंतरछेदांच्या गुणोत्तराएवढे असते.

पक्ष : $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$. T_1 ही एक छेदिका त्यांना अनुक्रमे A, B, व C मधे आणि T_2 ही छेदिका अनुक्रमे P, Q व R मधे छेदते.

साध्य : $\frac{d(A, B)}{d(B, C)} = \frac{d(P, Q)}{d(Q, R)}$



आ. 3·30

सिद्धता : रेषा PC, L_2 ला छेदते त्या बिंदूला N नाव द्या.

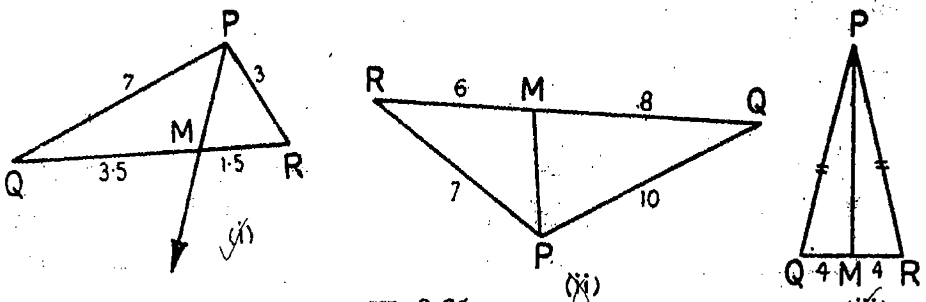
आता, $\triangle ACP$ मधे, **प्रमूप्रनुसार,** $\frac{d(A, B)}{d(B, C)} = \frac{d(P, N)}{d(N, C)}$ ...(I)

व $\triangle PCR$ मधे, **प्रमूप्रनुसार,** $\frac{d(P, N)}{d(N, C)} = \frac{d(P, Q)}{d(Q, R)}$ ...(II)

$\therefore$ विधाने (I) व (II) वरून, $\frac{d(A, B)}{d(B, C)} = \frac{d(P, Q)}{d(Q, R)}$.

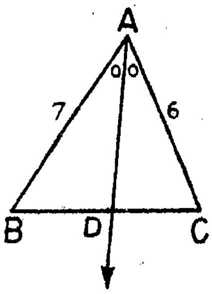
§ 3·21 प्रश्न :

1. खाली काही आकृती व उपयुक्त माहिती दिली आहे. तदनुसार, कोणत्या आकृतीत किरण PM हा ∠QPR चा दुभाजक होतो व कोणत्या आकृतीत तो त्या कोनाचा दुभाजक होत नाही ते ओळखा.



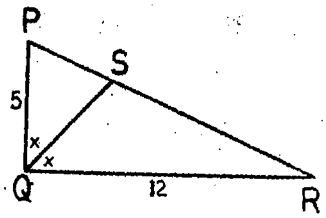
आ. 3·31

2. आ. 3·32 पाहा व तीत दिलेल्या माहितीच्या आधारे, प्रश्नचिन्हांकित रेषाखंडांच्या लांबी ओळखा.



l(BC) = 6·5 आहे.
तर l(DC) = ?

(b) $m\angle$PQR = 90 आहे,
तर l(RS) = ?

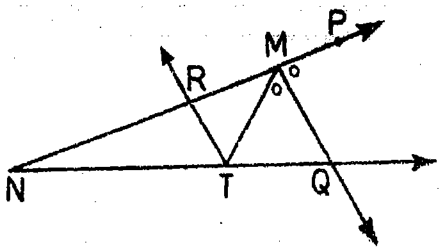


आ. 3·32 (ii)

आ. 3·32 (i)

3. सोबतच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे, △MNT च्या ∠PMT ह्या बाह्यकोनाचा दुभाजक रेषा NT ला Q बिंदूत छेदतो. तर सिद्ध करा की,

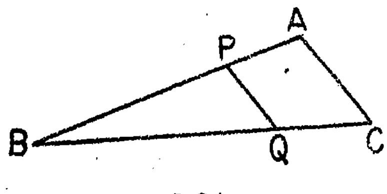
$$\frac{l(NQ)}{l(TQ)} = \frac{l(NM)}{l(TM)}$$



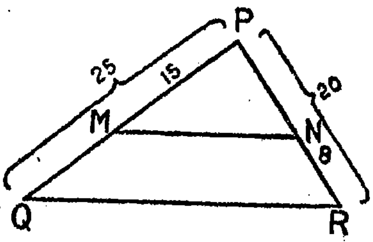
आ. 3·33

(सूचना : T मधून जाणारी व रेषा MQ ला समांतर असणारी रेषा, रेषा NM ला R मध्ये छेदते. △RMT हा समद्विभुज त्रिकोण होतो.)

4. आ. 3·34 मधे, रेख PQ ∥ रेख AC. त्यावरून विचारलेल्या किमती शोधा.
   (i) जर l(BP) = 7, l(BQ) = 8, l(PA) = 3·5 तर l(QC) = ?
   (ii) जर l(BC) = 20, l(BA) = 18, l(BP) = 12 तर l(BQ) = ?



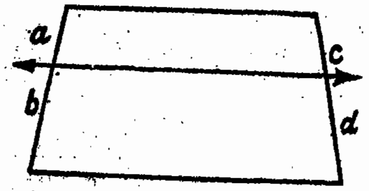
आ. 3·34



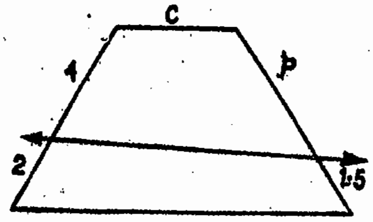
आ. 3·35

5. आ. 3·35 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे संबंधित रेषाखंडांच्या लांबी आहेत. तर त्यावरून रेख MN ∥ रेख QR म्हणता येईल काय ?

6. समलंब चौकोनाच्या समांतर भुजांना समांतर असणारी रेषा असमांतर भुजांना छेदत असल्यास प्रमाणात विभागते. म्हणजेच, आ. 3·36 (i) मधे $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ हे सिद्ध करा. त्याचप्रमाणे आ. 3·36 (ii) मधे $p=$?



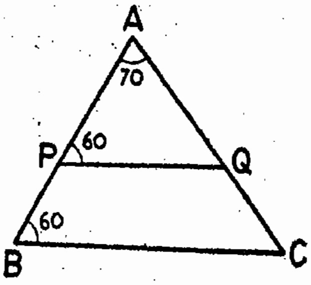
आ. 3·36 (i)



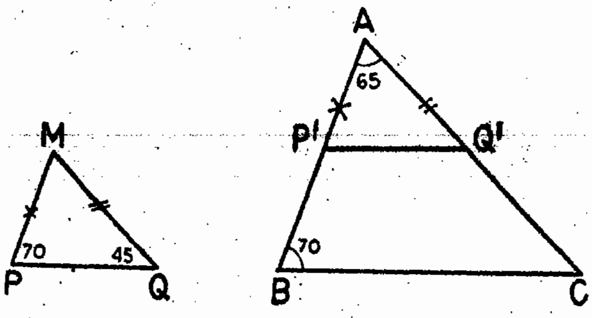
आ. 3·36 (ii)

7. आ. 3·37 मधे काही कोनांची मापे सूचित केली आहेत. त्याआधारे सिद्ध करा की,

$\frac{l(AP)}{l(AQ)}=\frac{l(AB)}{l(AC)}$.



आ. 3·37



आ. 3·38

8. आ. 3·38 व तीत दिलेली माहिती यांच्या आधारे सिद्ध करा की,

$\frac{l(MP)}{l(AB)}=\frac{l(MQ)}{l(AC)}$.

9. $\triangle$ ABC व $\triangle$ PQR यांत आ. 3·39 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे $m\angle BAC=80=m\angle QPR$,

$l(PQ)=5$, $l(PR)=7$

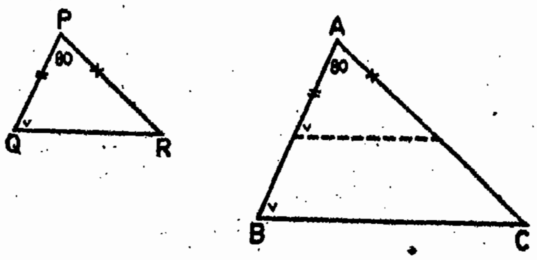
$l(AB)=15$, $l(AC)=21$.

तर सिद्ध करा की,

$\angle ABC\cong\angle PQR$ व

$\angle ACB\cong\angle PRQ$, आणि त्यावरून सिद्ध करा की,

$\frac{l(PR)}{l(AC)}=\frac{l(QR)}{l(BC)}$.



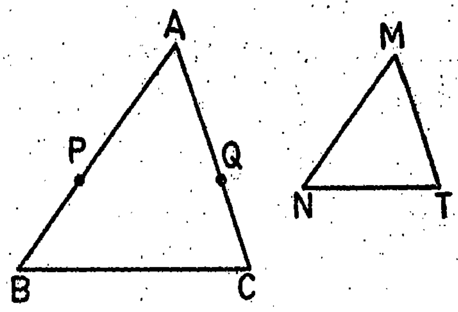
आ. 3·39

10. एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन कोनांशी एकरूप असले तर त्या दोन त्रिकोणांच्या संगतभुजा प्रमाणात असतात हे खरे आहे काय?

11. $\triangle ABC$ व $\triangle MNT$ यांत, आ. 3·40 मधे दाखवल्याप्रमाणे,

$$\frac{l(AB)}{l(MN)} = \frac{l(BC)}{l(NT)} = \frac{l(AC)}{l(MT)}.$$

किरण AB वर P आणि किरण AC वर Q हे असे बिंदू आहेत की $l(AP) = l(MN)$ व $l(AQ) = l(MT)$.
तर पुढील गोष्टी सिद्ध करा—



आ. 3·40

(i) रेख PQ || रेख BC (ii) $\frac{l(AB)}{l(AP)} = \frac{l(AC)}{l(AQ)} = \frac{l(BC)}{l(PQ)}$

(iii) $l(PQ) = l(NT)$ (iv) $\angle BAC \cong \angle NMT$.

§ 3·22 आपण आतापर्यंत त्रिकोणांमधील प्रमाणशीर लांबींच्या रेषाखंडांची थोडीफार माहिती मिळवली आहे. त्यापूर्वीच समरूप त्रिकोण म्हणजे काय याचीही ओळख आपण करून घेतली आहे. **दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमधील ज्या संगतीनुसार सर्व संगतकोन एकरूप व सर्व संगतभुजा प्रमाणात असतील** अशा संगतीला आपण त्या त्रिकोणांची समरूपता म्हणतो.

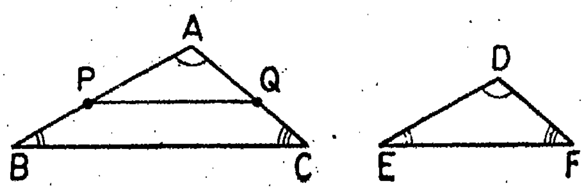
त्रिकोणांच्या **एकरूपतेबाबत** आपला अनुभव असा होता की, व्याख्येत जरी आपण 'सर्व संगतकोन एकरूप आणि सर्व संगतभुजा एकरूप' असावेत असे म्हटले तरी प्रत्यक्षात मात्र, एखादी संगती **एकरूपता आहे हे दाखवण्यासाठी या सर्व गोष्टी दिलेल्या असणे आवश्यक असते असे नाही. यांपैकी काही** गोष्टी अशा असतात की तेवढ्या त्या जर दिल्या असल्या तर उरलेल्या गोष्टी आपोआप मिळतातच. यावरूनच आपण एकरूपतेची **बाकोबा, कोबाको, बाबाबा** व **बाकोको** ही गृहीतके मांडली होती.

समरूपतेबाबतही असे काही आहे काय ? व्याख्येत अंतर्भूत केलेल्या अटींपैकी अशा काही अटी आहेत काय की ज्यांचे पालन होण्यामुळे इतर अटींचे पालन आपोआपच होते ? असे प्रश्न आपल्या मनात निर्माण होणे साहजिक आहे; आणि या प्रश्नांची उत्तरे खरोखरीच होकारार्थी येणार आहेत. पुढील काही परिच्छेदांमधील चर्चेवरून हे अधिक स्पष्ट होईल. समरूपतेच्या प्रमेयांची नावेही त्या अटींवरूनच दिली आहेत. ही नावे त्रिकोणांच्या एकरूपतेबाबतच्या गृहीतकांच्या नावांशी मिळतीजुळती आहेत हेही तुमच्या लक्षात येईल.

§ 3·23 ▪ **प्रमेय : कोकोको समरूपता प्रमेय.**

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमधील दिलेल्या संगतीनुसार होणारे संगतकोन जर एकरूप असतील तर ती संगती त्या त्रिकोणांची समरूपता असते

समजा, $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ यांच्या शिरोबिंदूंची $ABC \longleftrightarrow DEF$ ही एक दिलेली संगती आहे व $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ आणि $\angle C \cong \angle F$ हे दिले आहे.



आ. 3·41 (i)

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ हे आपल्याला सिद्ध करावयाचे आहे. त्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या गोष्टींपैकी 'संगतकोनांची एकरूपता' दिलेली आहेच. तेव्हा, 'संगतभुजा प्रमाणात आहेत' एवढे आता आपण सिद्ध केले की झाले.

$\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ यांच्या भुजांविषयी स्पष्टपणे आपल्याला काहीही दिलेले नाही. या त्रिकोणांच्या संगतभुजांची एखादी जोडी एकरूप असेल किंवा नसेलही. अर्थात अशी एखादी जोडी जर एकरूप असेल तर मग (कोबाको एकरूपता गृहीतकाने) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ होईल व त्यायोगे इतरही संगतभुजा एकरूप होतील.

संगतभुजा एकरूप असताना, त्या प्रमाणात असतात हे उघडच आहे.

$\left(\frac{l(AB)}{l(DE)} = \frac{l(BC)}{l(EF)} = \frac{l(AC)}{l(DF)} = 1\right)$ म्हणजे अशा वेळी $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ हे सहजच होते.

दिलेल्या या दोन त्रिकोणांच्या कोणत्याही संगतभुजा एकरूप नाहीत असे आता आपण मानू.
$\triangle ABC$ ची भुजा AB ही $\triangle DEF$ च्या रेख DE या संगतभुजेपेक्षा जास्त लांब आहे असे माना.

किरण AB वर P बिंदू आणि किरण AC वर Q बिंदू हे असे घ्या की, $d(A, P) = d(D, E)$ व $d(A, Q) = d(D, F)$.

$d(A, P) < d(A, B)$ असल्यामुळे, A-P-B.
P व Q या बिंदूंच्या निवडीनुसार,
रेख $AP \cong$ रेख DE व रेख $AQ \cong$ रेख DF.
आणि पक्षात दिल्याप्रमाणे $\angle A \cong \angle D$.

$\therefore \triangle APQ \cong \triangle DEF$ ... (बाकोबा एकरूपता गृहीतक)

$\therefore \angle APQ \cong \angle DEF$

पण $\angle DEF \cong \angle ABC$ ... (पक्ष)

$\therefore \angle APQ \cong \angle ABC$.

पण हे कोन, रेषा BC व रेषा PQ यांसाठी होणारे संगतकोन आहेत.

$\therefore$ रेषा BC $\parallel$ रेषा PQ.

अर्थात, यामुळे B व C हे बिंदू रेषा PQ च्या एकाच अंगास असणे आवश्यक आहे.
पण A व B हे रेषा PQ च्या विरुद्ध अंगास आहेत.

$\therefore$ A व C हे बिंदू, रेषा PQ च्या विरुद्ध अंगास असले पाहिजेत.

$\therefore$ Q हा A व C यांच्या दरम्यान असला पाहिजे.

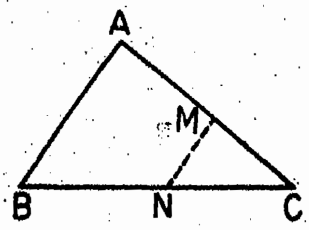
$\triangle ABC$ मध्ये रेख BC $\parallel$ रेख PQ.

$\therefore$ प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयानुसार,

$$\frac{l(AP)}{l(AB)} = \frac{l(AQ)}{l(AC)}$$

$$\therefore \frac{l(DE)}{l(AB)} = \frac{l(DF)}{l(AC)} \quad \ldots (I)$$

आता किरण CB वर N आणि किरण CA वर M हे बिंदू असे घ्या की,
$d(C, N) = d(E, F)$ व $d(C, M) = d(D, F)$. यांच्या जोडीला
$\angle C \cong \angle F$ असल्यामुळे,
$\triangle DEF \cong \triangle MNC$ ... (बाकोबा)
$\therefore \angle DEF \cong \angle MNC$.
पण $\angle DEF \cong \angle ABC$ ... (पक्ष)
$\therefore \angle MNC \cong ABC$.
व त्यामुळे रेषा MN $\parallel$ रेषा BA.



आ. 3·41 (ii)

$\therefore \triangle ABC$ मध्ये, प्रमूप्रनुसार, $\dfrac{l(CM)}{l(CA)} = \dfrac{l(CN)}{l(CB)}$

म्हणजेच, $\dfrac{l(DF)}{l(CA)} = \dfrac{l(EF)}{l(CB)}$ ... (II)

I व II वरून, $\dfrac{l(DE)}{l(AB)} = \dfrac{l(EF)}{l(BC)} = \dfrac{l(DF)}{l(AC)}$

(म्हणजे अर्थातच, $\dfrac{l(AB)}{l(DE)} = \dfrac{l(BC)}{l(EF)} = \dfrac{l(AC)}{l(DF)}$)

शिवाय, संगतकोनांची एकरूपता पक्षात दिली आहेच.

$\therefore$ ABC $\longleftrightarrow$ DEF ही संगती समरूपता होते.

§ 3·24 आता दोन त्रिकोणांची समरूपता सिद्ध करण्यासाठी समरूपतेच्या व्याख्येत दिलेल्या दोन अटींपैकी (सर्व संगतकोनांची एकरूपता ही एक व सर्व संगतभुजांची समरूपता ही दुसरी.) केवळ एक अटीचे पालन झाले तरी या प्रमेयाच्या साहाय्याने आपण त्रिकोणांची समरूपता सिद्ध करू शकतो.

कोकोको प्रमेयाच्या सिद्धतेच्या पूर्वार्धावरून आपल्या हे लक्षात येते की दोन त्रिकोण एकरूप असताना ते समरूप असतातच (ते एकरूप नसतानाही समरूप असू शकतात.) शिवाय, प्रत्येक त्रिकोण स्वतःशी एकरूप असतो हेही आपल्याला माहीत आहे. तेव्हा, **प्रत्येक त्रिकोण स्वतःशी समरूप असतो हे उघड आहे.**

पुढील उदाहरणांतून त्रिकोणांच्या समरूपतेचे काही महत्त्वाचे गुणधर्म स्पष्ट होतात.

उदा॰ 1. $\triangle ABC$ दिला आहे. तर मग ABC $\longleftrightarrow$ ABC ही संगती समरूपता आहे.

कारण, $\angle A \cong \angle A$, $\angle B \cong \angle B$, $\angle C \cong \angle C$ आणि रेख AB $\cong$ रेख AB, रेख BC $\cong$ रेख BC व रेख AC $\cong$ रेख AC.

अर्थातच $\dfrac{l(AB)}{l(AB)} = \dfrac{l(BC)}{l(BC)} = \dfrac{l(AC)}{l(AC)}$ ... (प्रत्येक गुणोत्तराची किंमत 1 आहे.)

$\therefore$ ABC $\longleftrightarrow$ ABC ही संगती समरूपता आहे. म्हणजेच, $\triangle ABC \sim \triangle ABC$.

उदा० 2. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ हे दिले आहे. तर मग $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

कारण, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ याचा अर्थ,

$\angle A \cong \angle D, \quad \angle B \cong \angle E, \quad \angle C \cong \angle F$

व $\frac{l(AB)}{l(DE)} = \frac{l(BC)}{l(EF)} = \frac{l(AC)}{l(DF)}$ असा होतो.

अर्थातच यावरून $\frac{l(DE)}{l(AB)} = \frac{l(EF)}{l(BC)} = \frac{l(DF)}{l(AC)}$ होते व $\therefore$ $DEF \longleftrightarrow ABC$

ही संगती समरूपता होते. म्हणजे, $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

उदा० 3. समजा $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ आणि $\triangle DEF \sim \triangle PQR$ असे दिले आहे.

तर मग $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

कारण, $\angle A \cong D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$ व $\angle D \cong \angle P$,
$\angle E \cong \angle Q, \angle F \cong \angle R$

हे आपल्याला दिले असल्यामुळे, $\angle A \cong \angle P, \angle B \cong \angle Q, \angle C \cong \angle R$ हा अर्थ सहजच निघतो व म्हणून $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ हा निष्कर्ष निघतो.

§ 3·25 प्रश्न :

पुढील विधाने खरी की खोटी ते ओळखा.

(i) दोन त्रिकोण एकरूप असण्यासाठी त्यांचे संगतकोन एकरूप असणे आवश्यक आहे. (ii) दोन त्रिकोण समरूप असण्यासाठी ते एकरूप असणे आवश्यक आहे. (iii) दोन त्रिकोण एकरूप नसल्यास देखील ते समरूप असू शकतात. (iv) दोन त्रिकोण समरूप असण्यासाठी ते एकरूप असणे पुरेसे आहे. (V) दोन त्रिकोण एकरूप असण्यासाठी त्यांच्या संगतभुजा एकरूप असणे पुरेसे आहे. (vi) दोन त्रिकोण समरूप असण्यासाठी त्यांच्या संगतभुजा एकरूप असणे पुरेसे आहे.

§ 3·26 प्रत्येक त्रिकोणात, त्याच्या तिन्ही कोनांच्या मापांची बेरीज 180 असते. त्यामुळे एखादया संगतीनुसार एका त्रिकोणाचे दोन कोन जर दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन कोनांशी एकरूप असतील तर पहिल्या त्रिकोणाचा उरलेला तिसरा कोन हा दुसऱ्या त्रिकोणाच्या उरलेल्या तिसऱ्या कोनाशी एकरूप होतोच, (पर्यायाने पहिल्या त्रिकोणाचे तिन्ही कोन दुसऱ्या त्रिकोणांच्या संगतकोनांशी एकरूप होतात.) आणि मग या त्रिकोणांसाठी कोकोको समरूपता प्रमेय लागू पडते. म्हणजे दिलेली संगती समरूपता आहे हे सिद्ध करण्यासाठी, फक्त दोन कोनांची त्यांच्या संगतकोनांशी एकरूपता दिली असली तरी पुरते.

खाली याच अर्थाचे एक प्रमेय मांडले आहे.

■ **कोको समरूपता उपप्रमेय :**

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंच्या दिलेल्या संगतीनुसार एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगतकोनांशी एकरूप असतील तर ती संगती समरूपता असते.

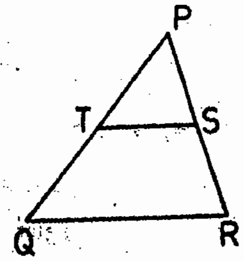
§ 3·27 प्रश्न :

1. $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ यांत पुढे दिल्याप्रमाणे परिस्थिती असल्यास, त्या त्रिकोणांची एखादी संगती समरूपता आहे काय व असल्यास ती कोणती ते ओळखा.

   (i) $m\angle A=50$, $m\angle C=60$, $m\angle B=70$, $m\angle D=60$, $m\angle F=50$, $m\angle E=70$. (ii) $m\angle A=105$, $m\angle B=10$, $m\angle E=10$; $m\angle F=105$. (iii) $m\angle A=90$, $m\angle C=30$, $m\angle F=60$, $m\angle E=30$. (iv) $m\angle B=30$, $m\angle C=20$, $m\angle D=100$, $m\angle F=20$.

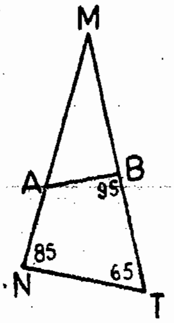
2. सोबतच्या आकृतीत (आ. 3·42) रेख TS $\parallel$ रेख QR, तर

   (i) $\triangle PTS$ चे दोन कोन $\triangle PQR$ च्या दोन कोनांशी एकरूप आहेत काय? (ii) $\triangle PTS$ व $\triangle PQR$ यांची कोणती संगती समरूपता आहे? (iii) $\dfrac{l(PT)}{l(PQ)}=\dfrac{l(TS)}{\ldots}$ या विधानातील रिकाम्या जागी योग्य माहिती भरा.



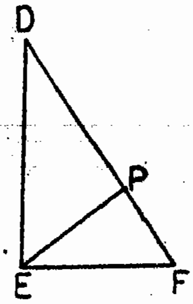
आ. 3·42

3. आकृती व तीत दिलेली माहिती (आ. 3·43) यांच्या आधारे, $\triangle MAB$ व $\triangle MNT$ यांची कोणती संगती समरूपता आहे ते सांगा. $m\angle T \neq 65$ असतानाही तुम्ही सुचवलेली संगती समरूपता असेल काय?



आ. 3·43

4. आ. 3·44 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे, $m\angle DEF=90$ व $m\angle DPE=90$ असल्यास, $\triangle DEF$ व $\triangle DEP$ यांची $DEF \longleftrightarrow DPE$ ही संगती समरूपता आहे हे सिद्ध करा.



आ. 3·44

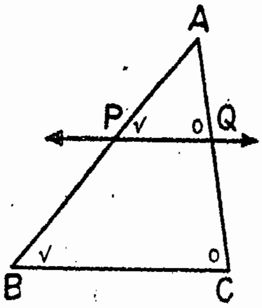
§ 3·28 ■ उपप्रमेय :

त्रिकोणाच्या एका भुजेला समांतर असणाऱ्या रेषेने त्याच्या इतर दोन भुजांना भिन्न बिंदूंत छेदल्यामुळे जो त्रिकोण निर्माण होतो तो त्या मूळ त्रिकोणाशी समरूप असतो.

म्हणजे आ. 3·45 प्रमाणे जर रेख PQ $\parallel$ रेख BC असेल तर $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ हे आपल्याला सिद्ध करायचे आहे.

या दोन त्रिकोणांसाठी $\angle A$ तर समाईकच आहे. आता या त्रिकोणांमधील कोनांची आणखी एक जोडी एकरूप असल्याचे दाखवता आले तर आपले काम झाले.

रेषा PQ $\parallel$ रेषा BC असल्यामुळे हे सहज दाखवता येते. (उदाहरणार्थ, $\angle APQ \cong \angle ABC$...संगतकोन)



आ. 3·45

त्यामुळे, कोको समरूपता उपप्रमेयाने, $APQ \longleftrightarrow ABC$ ही संगती समरूपता असल्याचे सिद्ध होते.

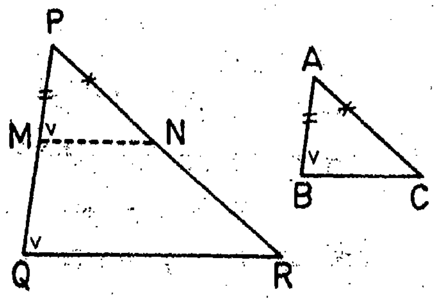
§ 3·29 ▪ बाकोबा समरूपता प्रमेय :

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंच्या दिलेल्या संगतीनुसार एका त्रिकोणाच्या दोन भुजा दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगतभुजांशी प्रमाणात असतील आणि त्या भुजांमधील कोन एकरूप असतील तर ती संगती समरूपता असते.

पक्ष : $\triangle PQR$ व $\triangle ABC$

यांत $\frac{l(PQ)}{l(AB)} = \frac{l(PR)}{l(AC)}$ आणि

$\angle QPR \cong \angle BAC$.



साध्य : $PQR \longleftrightarrow ABC$ ही संगती समरूपता आहे.

(म्हणजे $\triangle PQR \sim \triangle ABC$)

आ. 3·46

सिद्धता : रेख PQ व रेख AB ह्या संगतभुजा एकरूप आहेत की नाहीत याविषयी प्रकटपणे आपल्याला काहीही दिलेले नाही. $\frac{l(PQ)}{l(AB)} = \frac{l(PR)}{l(AC)}$ यावरून एवढे मात्र खरे की,

जर रेख PQ $\cong$ रेख AB असेल तर रेख PR $\cong$ रेख AC व जर रेख PQ हा रेख AB ला एकरूप नसेल तर रेख PR हा रेख AC ला एकरूप नाही.

आपल्याला या दोन्ही स्थितींचा विचार करायचा आहे.

प्रथम आपण रेख PQ $\cong$ रेख AB हे गृहीत धरू.

यामुळे, रेख PR $\cong$ रेख AC.

पक्षात $\angle QPR \cong \angle BAC$ हे दिले आहेच.

तेव्हा, बाकोबा एकरूपता गृहीतकानुसार $\triangle PQR \cong \triangle ABC$ होते व अर्थातच $\triangle PQR \sim \triangle ABC$ हे सिद्ध होते.

आता आपण रेख PQ हा रेख AB ला एकरूप नाही हे गृहीत धरू.

अर्थात यामुळे रेख PR हा रेख AC ला एकरूप नाही हेही आलेच.

रेख PQ व रेख AB यांमध्ये कोणती तरी एक भुजा दुसरीहून मोठी असणारच.

$l(PQ) > l(AB)$ असे आपण गृहीत धरू.

अर्थात यामुळे $l(PR) >$ (AC) हेही ठरते. आता, किरण PQ वर M आणि किरण PR वर N हे बिंदू जर आपण असे घेतले की,

$d(P, M) = d(A, B)$ आणि $d(P, N) = d(A, C)$

तर M हा P व Q यांच्या दरम्यान आणि N हा P व R यांच्या दरम्यान राहील.

तसेच, या रचनेमुळे, (आ. 3·46 पाहा)

$\triangle PMN \cong \triangle ABC$ ...(बाकोबा एकरूपता गृहीतक)

$\therefore \angle PMN \cong \angle ABC$
व $\angle PNM \cong \angle ACB$ } ...(एकरूप त्रिकोणांचे संगतकोन)

M व N या बिंदूंसाठी केलेल्या रचनेचा आणखी एक परिणाम असा की,

पक्षातील $\frac{l(PQ)}{l(AB)} = \frac{l(PR)}{l(AC)}$ या विधानाचा $\frac{l(PQ)}{l(PM)} = \frac{l(PR)}{l(PN)}$ असा अर्थ होतो.

व म्हणून रेषा MN $\parallel$ रेषा QR ... (प्रमूप्रचा व्यत्यास)

त्यामुळे, $\angle PMN \cong \angle PQR$ आणि $\angle PNM \cong \angle PRQ$ ... (समांतर रेषांमुळे झालेले संगतकोन)

याप्रमाणे आता $\angle ABC \cong \angle PQR$ व $\angle ACB \cong \angle PRQ$ असे मिळते.

आणि **कोको** समरूपता उपप्रमेयाने

$\triangle PQR \sim \triangle ABC$ हे सिद्ध होते.

टीप : 1. $l(PQ) > l(AB)$ ऐवजी $l(AB) > l(PQ)$ आहे असे मानले तरीही अशीच सिद्धता देता येते. किरण AB वर M आणि किरण AC वर N असे निवडावेत की $d(A, M) = d(P, Q)$ आणि $d(A, N) = d(P, R)$.

2. वरील सिद्धतेत, रेषा MN $\parallel$ रेषा QR हे सिद्ध झाल्याबरोबर लगेच आपल्याला $\triangle PMN \sim \triangle PQR$ असे म्हणता येईल (उपप्रमेय 3·28). तत्पूर्वी $\triangle PMN \cong \triangle ABC$ हे सिद्ध झाले असल्याने $\triangle PQR \sim \triangle ABC$ हे सिद्ध होते.

§ 3·30 समरूपतेची ही प्रमेये अभ्यासत असताना या विधानाची तुलना त्रिकोणाच्या एकरूपतेच्या गृहीतकांच्या विधानांशी अवश्य करून पाहावी. एकरूपतेसाठी 'कोकोको' संगती पुरेशी नसते; समरूपतेसाठी मात्र ती पुरेशी आहे. एकरूपतेसाठी असणारे 'बाकोबा' संगतीचे विधान आणि समरूपतेच्या **बाकोबा** प्रमेयाचे विधान यांत असलेला महत्त्वाचा फरक हा की, एकरूपतेच्या बाकोबा गृहीतकात संगतभुजांच्या दोन जोडयांची एकरूपता अपेक्षिली आहे तर समरूपतेच्या बाकोबा प्रमेयात संगतभुजांच्या दोन जोडयांची प्रमाणबद्धता अपेक्षिली आहे. बाकी त्या भुजांमधील कोनांची एकरूपता दोन्ही विधानांस अपेक्षित आहेच. एकरूपता व समरूपता या दोघांत 'कमी-अधिक' महत्त्वाचा कोण हे सांगण्याचा आपला प्रयत्न नाही. फक्त सारखेपणा व फरक आपण शोधत आहोत.

एकरूपतेतील 'कोबाको' आणि 'बाकोको' या पद्धतींची विधाने समरूपतेसाठी प्रमेये म्हणून येणार नाहीत. ती येण्याचे प्रयोजनही नाही. कारण, **कोको** समरूपता उपप्रमेयाने यांच्याहीपेक्षा कमी अटींवर समरूपतेची ग्वाही दिलेली आहे.

मात्र एकरूपतेसाठी असणाऱ्या 'बाबाबा' गृहीतकाच्या धर्तीचे, समरूपतेसाठी **बाबाबा** प्रमेय आहे. अर्थात या दोन विधानांमधे फरक आहेच. (तो कोणता ?)

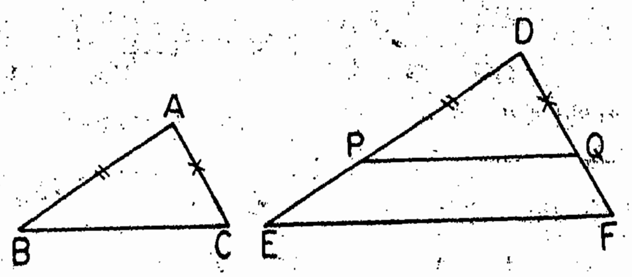
§ 3·31 ▪ बाबाबा समरूपता प्रमेय :

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंची दिलेली संगती जर अशी असेल की एका त्रिकोणाच्या तीन भुजा, दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन संगतभुजांशी प्रमाणात आहेत, तर ती संगती समरूपता असते.

पक्ष : $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ यांत,

$$\frac{l(AB)}{l(DE)} = \frac{l(BC)}{l(EF)} = \frac{l(AC)}{l(DF)}$$

साध्य : ABC ⟷ DEF ही समरूपता आहे. (म्हणजे $\triangle ABC \sim DEF$)



आ. 3·47

सिद्धता : ज्याअर्थी $\frac{l(AB)}{l(DE)} = \frac{l(BC)}{l(EF)} = \frac{l(AC)}{l(DF)}$ दिले आहे, त्याअर्थी **एकतर** संगत-भुजांच्या सर्व जोड्या **एकरूप** असतील, **किंवा** संगतभुजांची एकही जोडी एकरूप असणार नाही.

जर संगतभुजांच्या सर्व जोड्या एकरूप असतील तर दिलेले दोन त्रिकोण एकरूप असले पाहिजेत (बाबाबा गृहीतक). आणि मग त्यावेळी $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ हे सहजच सिद्ध होते.

आपण अशी कल्पना करू की संगतभुजांची एकही जोडी येथे एकरूप नाही. म्हणजे $l(AB) \neq l(DE)$, $l(BC) \neq l(EF)$ व $l(AC) \neq l(DF)$. अर्थातच, $\triangle ABC$ हा $\triangle DEF$ ला एकरूप नाही. म्हणजे आपण किरण DE वर P आणि किरण DF वर Q हे बिंदू जर असे घेतले की $d(D, P) = d(A, B)$ आणि $d(D, Q) = d(A, C)$ तर $P \neq E$ आणि $Q \neq F$ राहील.

या रचनेमुळे $\frac{l(PD)}{l(DE)} = \frac{l(QD)}{l(DF)}$ असे म्हणता येते.

यावरून, रेषा PQ ∥ रेषा EF हे सिद्ध होते ... (प्रमूप्र च्या व्यत्यासाने)

$\therefore \triangle DPQ \sim \triangle DEF$ ... (I) (कोकोको समरूपता प्रमेयाचे उपप्रमेय)

$\therefore \frac{l(DP)}{l(DE)} = \frac{l(PQ)}{l(EF)} = \frac{l(DQ)}{l(DF)}$

म्हणजे $\frac{l(AB)}{l(DE)} = \frac{l(PQ)}{l(EF)} = \frac{l(AC)}{l(DF)}$ ... (II)

पक्षानुसार, $\frac{l(AB)}{l(DE)} = \frac{l(BC)}{l(EF)} = \frac{l(AC)}{l(DF)}$ ... (III)

विधाने (II) व (III) यांची तुलना केल्यास $l(BC) = l(PQ)$ हे सिद्ध होते.

म्हणून आता, $\triangle DPQ \cong \triangle ABC$ नुकतेच सिद्ध केल्याप्रमाणे

रेख PQ ≅ रेख BC व रचनेप्रमाणे रेख DP ≅ रेख AB आणि रेख DQ ≅ रेख AC.

$\therefore \triangle DPQ \sim \triangle ABC$.

यावरून विधान I च्या साहाय्याने $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

§ 3·32 प्रश्न :

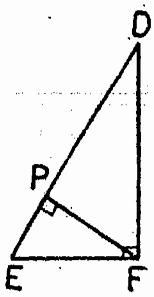
1. PQR ⟷ MNT ही दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंची संगती दिली आहे. खालीलपैकी कोणती परिस्थिती $\triangle PQR \sim \triangle MNT$ हे सिद्ध करण्यास पुरेशी आहे ते ओळखा.

(i) $\angle Q \cong \angle N$ व $\angle R \cong \angle T$, (ii) $\dfrac{l(PR)}{l(PQ)} = \dfrac{l(MT)}{l(MN)}$, (iii) दोन्ही त्रिकोण समभुज आहेत. (iv) दोन्ही त्रिकोण समद्विभुज आहेत. (v) दोन्ही त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहेत., (vi) दोन्ही त्रिकोण परस्परांशी एकरूप आहेत., (vii) $l(PQ) = l(QR)$ आणि, $l(MN) = l(NT)$ असून $\angle PQR \cong \angle MNT$ आहे.

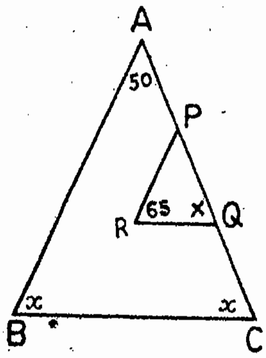
2. (i) दोन त्रिकोणांपैकी पहिल्या त्रिकोणामधील दोन कोन 60 व 70 अशा मापांचे असून दुसऱ्या त्रिकोणाचा एक कोन 50 मापाचा आहे. तर ते त्रिकोण समरूप असणे शक्य आहे की अशक्य आहे? (ii) पहिला काटकोन त्रिकोण असून दुसरा समभुज त्रिकोण आहे, तर ते त्रिकोण समरूप असणे शक्य आहे की अशक्य आहे? (iii) पहिला, काटकोन त्रिकोण असून दुसरा समद्विभुज त्रिकोण आहे, तर ते त्रिकोण समरूप असणे शक्य आहे की अशक्य आहे (iv) पहिल्याच्या तीन भुजा अनुक्रमे 5, 6 व 7 मापे लांबीच्या असून, दुसऱ्याची परिमिती 2000 मापे आहे. दुसऱ्याची प्रत्येक भुजा पूर्ण मापात मोजता येण्यासारखी आहे, तर ते त्रिकोण समरूप असणे शक्य आहे की अशक्य आहे?

3. $\triangle DEF$ मधे $m\angle DFE = 90$, आणि रेख FP ⊥ रेख DE (आ. 3·48 पाहा). P हा लंबाचा पाद आहे तर,

(i) $\triangle DPF$ व $\triangle DEF$ हे समरूप असण्याची शक्यता आहे काय? (ii) $\triangle PEF$ व $\triangle DEF$ हे समरूप असलेच पाहिजेत काय? की समरूप नसणेही संभवते? (iii) $\triangle PEF$ व $\triangle DEF$ यांची कोणती संगती समरूपता आहे? कोणत्या प्रमेयाने? (iv) $\triangle PEF \sim \triangle FED$ हे सिद्ध करा. (v) $\triangle PEF \sim \triangle PFD$ हे सिद्ध करा.



आ. 3·48

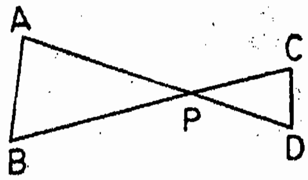
4. 

आ. 3·49

आ. 3·49 पाहा. तीत दोन त्रिकोण दाखवले आहेत. कोनांची मापेही आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे आहेत. तर,

(i) दोन त्रिकोण समरूप आहेत काय? (ii) कोणत्या प्रमेयाने? (iii) कोणत्या संगतीने?

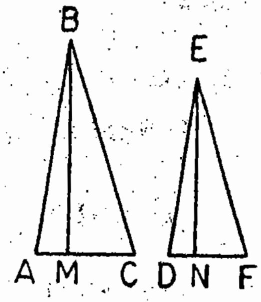
5. आ. 3·50 मधे दाखवल्याप्रमाणे, रेख AD व रेख BC परस्परांना P बिंदूत छेदतात. $l(AP) \times l(PD) = l(BP) \times l(CP)$. तर $\triangle ABP$ व $\triangle PCD$ यांची समरूपता-संगती सांगा व सिद्ध करा.



आ. 3·50

6. आ. 3·51 मधे, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
रेख $BM \perp$ रेख AC, रेख $EN \perp$ रेख DF.
तर सिद्ध करा की, $\triangle AMB \sim \triangle DNE$.

7. दोन त्रिकोण समरूप आहेत. पहिल्याची प्रत्येक भुजा दुसऱ्याच्या संगतभुजेच्या चौपट लांबीची आहे. तर त्या पहिल्या त्रिकोणाची उंची, दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगतउंचीच्या किती पट असेल ? पहिल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ, दुसऱ्या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या किती पट असेल ?



आ. 3·51

8. समरूप त्रिकोणांच्या संगतमध्यगा प्रमाणात असतात हे सिद्ध करा.

§ 3·33 काटकोन त्रिकोणांची समरूपता :

समरूपतेचे कोकोको प्रमेय आपण अभ्यासले. प्रत्येक त्रिकोणात तिन्ही कोनांच्या मापांची बेरीज 180 हीच राहत असल्याने आपण 'कोको समरूपता उपप्रमेय' मांडू शकलो.

आपण जर दोन काटकोन त्रिकोणांचा विचार करीत असू तर त्या दोन त्रिकोणांमधील काटकोनांव्यतिरिक्त फक्त एकेक संगतकोन एकरूप असल्याचे समजल्याबरोबर, ते दोन त्रिकोण समरूप असल्याचा निर्णय आपण देऊ शकू.

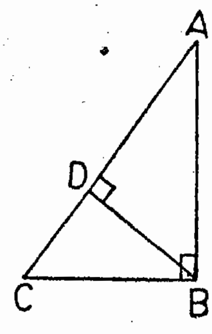
काटकोन त्रिकोणामध्ये, कर्णावर शिरोलंब काढल्यास आपल्याला दोन नवीन काटकोन त्रिकोण मिळतात. हे दोन व मूळचा एक अशा तीन काटकोन त्रिकोणांच्या समरूपतेचा विचार पुढील प्रमेयात केला आहे. त्यातून आणखीही काही महत्त्वाचे गुणधर्म आपल्या नजरेस येणार आहेत.

■ **प्रमेय :**

काटकोन त्रिकोणात, काटकोन बिंदूपासून कर्णावर काढलेल्या शिरोलंबामुळे, त्या त्रिकोणाचे जे दोन त्रिकोण होतात ते परस्परांशी समरूप असतात व मूळ त्रिकोणाशीही समरूप असतात.

पक्ष : $\triangle ABC$ मधे, $m\angle ABC = 90$, D बिंदूत
रेख $BD \perp$ रेख AC,

साध्य : (i) $\triangle DBA$ व $\triangle DCB$ हे समरूप आहेत.
(ii) $\triangle DBA$ हा $\triangle BCA$ शी समरूप आहे.
(iii) $\triangle DCB$ हा $\triangle BCA$ शी समरूप आहे.



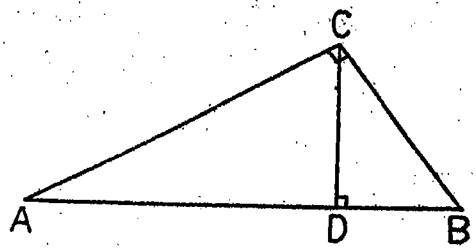
आ. 3·52

सिद्धता : $\triangle DBA$ व $\triangle ABC$ यांत,
$\angle BDA \cong \angle ABC$ ...(दोन्हीही काटकोन)
$\angle DAB \cong \angle BAC$ ...(एकाच कोनाची दोन नावे)
$\therefore \triangle DAB \sim \triangle BAC$ ... I. (कोको समरूपता उपप्रमेय)
$\triangle DBC$ व $\triangle ABC$ यात, $\angle BDC \cong \angle ABC$ ... II. (दोन्हीही काटकोन)
व $\angle DCB \cong \angle ACB$ ... (एकाच कोनाची दोन नावे)
$\therefore \triangle DBC \sim \triangle BAC$ ... II. (कोको समरूपता उपप्रमेय)
आता, विधाने (I) व (II) वरून $\triangle DAB \sim \triangle DBC$ ... III.

■ **उपप्रमेय :**

काटकोन त्रिकोणात, काटकोन बिंदूपासून कर्णावर काढलेल्या लंबरेषाखंडाची लांबी, त्या लंबपादाने कर्णाच्या झालेल्या दोन खंडांच्या लांबींची भूमितीमध्य (Geometric Mean) असते.

स्पष्टीकरण : आ. 3·53 पाहा. $\triangle ABC$ मधे $m\angle ACB = 90$ असून रेख CD हा रेख AB ला D येथे लंब आहे. तर, $l(CD)$ हे $l(AD)$ व $l(BD)$ यांचे भूमितीमध्य आहे, हे येथे सिद्ध करायचे आहे. (म्हणजे, $(l(CD))^2 = l(AD) \times l(BD)$ हे सिद्ध करायचे आहे.)



आ. 3·53

सिद्धता : $m\angle ADC = m\angle BDC$ ... (प्रत्येकी 90)

व $m\angle DAC = m\angle DCB$ ... (प्रत्येकी $90 - m\angle ACD$)

$\therefore \triangle DAC \sim \triangle DCB$ ... (कोको समरूपता उपप्रमेय)

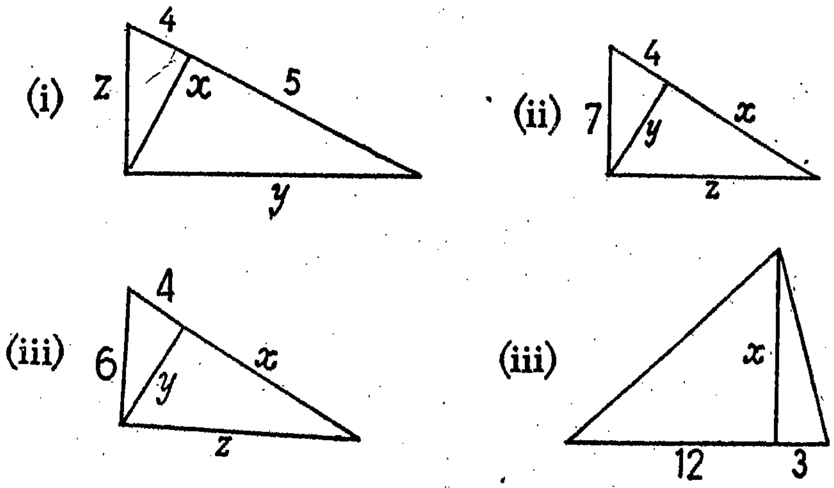
$$\therefore \frac{l(DA)}{l(DC)} = \frac{l(AC)}{l(CB)} = \frac{l(DC)}{l(DB)}$$

$$\therefore \frac{l(DA)}{l(DC)} = \frac{l(DC)}{l(DB)}$$

$$\therefore (l(DC))^2 = l(DA) \times l(DB).$$

§ 3·34 **प्रश्न :**

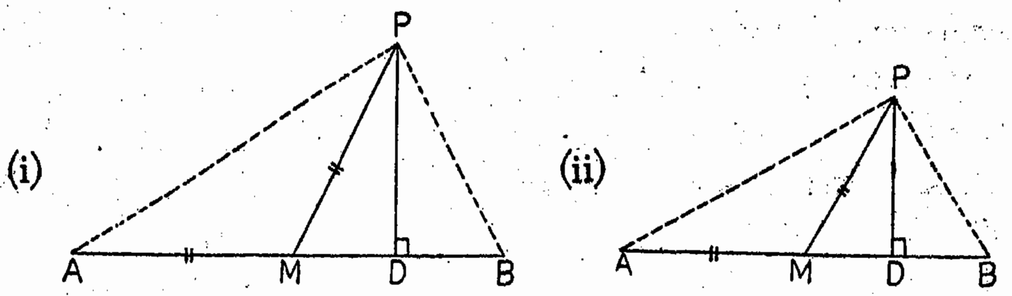
1. $\triangle ABC$ मधे, $m\angle ACB = 90$. रेख CD $\perp$ रेख AB. D हा या लंबाचा पाया आहे. तर सिद्ध करा की, (i) $(l(AC))^2 = l(AB) \times l(AD)$ (ii) $l(CB)$ हे $l(AB)$ व $l(DB)$ यांचे भूमितीमध्य आहे.
2. एका काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावर काटकोनबिंदूपासून शिरोलंब काढला आहे (आ. 3·54 पाहा). तीत काही रेषाखंडांच्या लांबी दिलेल्या आहेत. त्यावरून x, y, z ह्या अक्षरांनी दाखवलेल्या लांबी ओळखा.



आ. 3·54

3. एका काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावर काढलेल्या शिरोलंबाने त्या कर्णाचे जे दोन खंड पाडले त्यांच्या लांबी 16 व 9 आहेत. तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ किती?

4. सोबतच्या आकृतींमधे, (आ. 3·55) M हा रेख AB चा मध्यबिंदू आहे. D हा रेख AB चा कोणताही एक बिंदू असून रेख DP ⊥ रेख AB आणि $l(MP) = l(MA)$.



(i) $l(AB) = 30$ व $l(AD) = 20$ तर, $l(DP) = ?$

(ii) $l(AB) = 33$ व $l(AD) = 25$ तर, $l(DP) = ?$

आ. 3·55

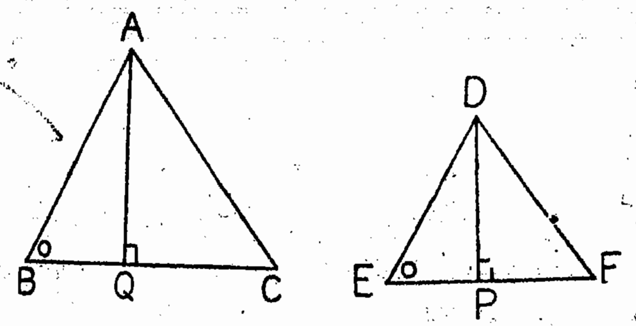
§ 3·35 क्षेत्रफळ :

आतापर्यंत समरूप त्रिकोणांचा अभ्यास, आपण त्यांच्या भुजांच्या लांबींच्या संदर्भात केला. दोन त्रिकोण समरूप सिद्ध करण्यासाठी काही उपयुक्त प्रमेयेही आपण मांडली. आता, परस्परांशी समरूप असणाऱ्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांत काही संबंध असतो काय ते आपल्याला पाहायचे आहे. दोन त्रिकोण समरूप असले म्हणजे त्यांच्या संगतउंचींचे गुणोत्तर आणि संगतपायांचे गुणोत्तर समान असतात हे पुढील विवेचनाने स्पष्ट होईल.

आ. 3·56 मधे दाखवल्याप्रमाणे, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

अर्थातच, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

आणि $\dfrac{l(AB)}{l(DE)} = \dfrac{l(BC)}{l(EF)} = \dfrac{l(AC)}{l(DF)}$.



रेख AQ व रेख DP हे शिरोलंब आहेत.

आ. 3·56

म्हणजे, जर $\dfrac{l(AB)}{l(DE)} = x$ तर, $\dfrac{l(BC)}{l(EF)} = x$ व $\dfrac{l(AC)}{l(DF)} = x$.

आता, आपण $\triangle ABQ$ व $\triangle DEP$ यांचा जर विचार केला, तर यांत

$\angle B \cong \angle E$ आणि $m\angle AQB = 90 = m\angle DPE$.

$\therefore \triangle ABQ \sim \triangle DEP$ ... (कोको समरूपता उपप्रमेय)

$$\therefore \frac{l(AB)}{l(DE)} = \frac{l(BQ)}{l(EP)} = \frac{l(AQ)}{l(DP)}$$

म्हणजे, आधी कल्पना केल्याप्रमाणे

जर $\dfrac{l(AB)}{l(DE)} = x$ असेल तर, $\dfrac{l(AQ)}{l(DP)} = x$ होईल.

म्हणजेच,

दोन त्रिकोण जर समरूप असतील तर त्यांच्या संगतउंचींचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगतभुजांच्या गुणोत्तराएवढे असते.

जर $\triangle ABC$ चा रेख BC हा पाया, $\triangle DEF$ चा रेख EF ह्या पायाच्या **तिप्पट** लांब असेल तर $l(AQ)$ ही $\triangle ABC$ ची उंची देखील $\triangle DEF$ च्या $l(DP)$ या उंचीच्या **तिप्पटच** राहते म्हणून, $\triangle ABC$ चे क्षेत्रफळ हे $\triangle DEF$ च्या क्षेत्रफळाच्या 9 पट होते.

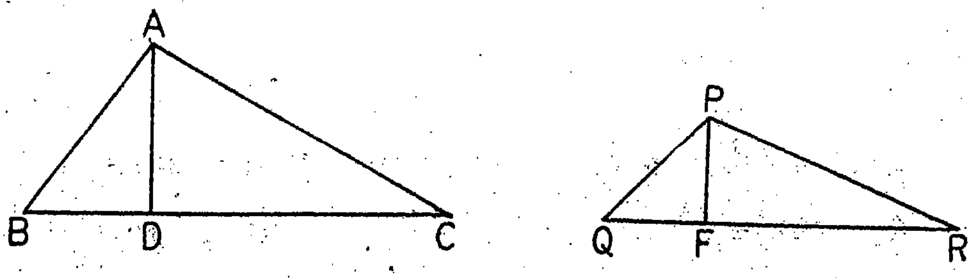
§ 3·36 **प्रश्न :**

1. दोन समरूप त्रिकोणांच्या संगतभुजांचे गुणोत्तर 5 आहे. तर त्यांच्या संगतउंचींचे गुणोत्तर किती ? त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर किती ?
2. दोन समरूप त्रिकोणांपैकी एकाचे क्षेत्रफळ दुसऱ्याच्या 36 पट आहे. तर मोठ्या त्रिकोणाची भुजा, लहान त्रिकोणाच्या संगतभुजेच्या किती पट लांब असेल ?
3. x आणि y जर दोन समरूप त्रिकोणांच्या संगतभुजांच्या लांबी दाखवीत असतील आणि A आणि B जर त्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे दाखवीत असतील तर, $\frac{A}{B} = \frac{\dots}{\dots}$ हे विधान पूर्ण करा.

§ 3·37 ■ **प्रमेय :**

दोन त्रिकोण जर समरूप असतील तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगतभुजांच्या गुणोत्तराच्या वर्गाबरोबर असते.

पक्ष : $\triangle ABC \sim \triangle PQR$. रेख AD व रेख PF हे अनुक्रमे $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$ मधील शिरोलंब आहेत.



आ. 3·57

साध्य : $\dfrac{\triangle ABC \text{ चे क्षे. फ.}}{\triangle PQR \text{ चे क्षे. फ.}} = \left(\dfrac{l(AB)}{l(PQ)}\right)^2$

सिद्धता : ज्याअर्थी, $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

त्याअर्थी, $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$

आणि $\dfrac{l(AB)}{l(PQ)} = \dfrac{l(BC)}{l(QR)} = \dfrac{l(AC)}{l(PR)}$ $\Big\}$ ...I

आता, $\triangle ABD$ व $\triangle PQF$ यांचा विचार केल्यास

$\angle ABD \cong \angle PQF$ व $\angle ADB \cong \angle PFQ$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle PQF$ ... (कोको समरूपता उपप्रमेय.)

त्यामुळे, $\dfrac{l(AB)}{l(PQ)} = \dfrac{l(AD)}{l(PF)}$ ... II

आता क्षेत्रफळाच्या सूत्राप्रमाणे,

$\triangle ABC$ चे क्षे. फ. $= \frac{1}{2}\, l\,(BC) \times l\,(AD)$ व $\triangle PQR$ चे क्षे. फ. $= \frac{1}{2}\, l\,(RQ) \times l\,(PF)$.

$$\therefore \frac{\triangle ABC \text{ चे क्षे. फ.}}{\triangle PQR \text{ चे क्षे. फ.}} = \frac{\frac{1}{2}\, l\,(BC) \times l\,(AD)}{\frac{1}{2}\, l\,(QR) \times l\,(PF)}$$

$$= \frac{l\,(BC)}{l\,(QR)} \times \frac{l\,(AD)}{l\,(PF)}$$

$$= \frac{l\,(AB)}{l\,(PQ)} \times \frac{l\,(AB)}{l\,(PQ)} \quad \text{... I व II वरून}$$

$$= \left(\frac{l\,(AB)}{l\,(PQ)}\right)^2.$$

स्वाध्याय :

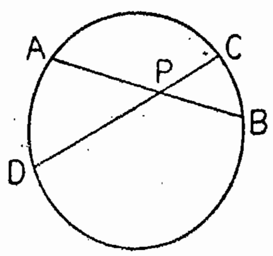
1. PQR $\longleftrightarrow$ MNT ही संगती **एकरूपता नाही** तर पुढीलपैकी कोणते विधान खरे राहू शकत नाही ? (आकृती काढा.)
   (i) $\angle P \cong \angle M$, $\angle Q \cong \angle N$ व $\angle R \cong \angle T$.
   (ii) रेख PQ $\cong$ रेख MN, रेख QR $\cong$ रेख NT व रेख PR $\cong$ रेख MT.

2. ABC $\longleftrightarrow$ DEF या संगतीत रेख AB व रेख BC हे, रेख DE व रेख EF ह्या रेषाखंडांशी प्रमाणात आहेत. तर,
   (i) रेख BC व रेख AC हे रेख EF व रेख DF ह्या रेषाखंडांशी प्रमाणात असतील का ?
   (ii) $\angle B$ हा $\angle E$ शी एकरूप नसूनही ते दोन त्रिकोण समरूप असू शकतील काय ?
   (iii) $\angle B$ हा $\angle E$ शी एकरूप असताना, ते दोन त्रिकोण समरूप नाहीत हे होऊ शकेल काय ?

3. $\triangle MNQ \sim \triangle PQR$. तर पुढील विधानातील रिकाम्या जागा योग्य प्रकारे भरा :
   (i) $\dfrac{l\,(MN)}{____} = \dfrac{l\,(MQ)}{____}$ (ii) $\dfrac{l\,(NQ)}{____} = \dfrac{____}{l\,(PR)}$ (iii) $\angle MNQ \cong ____$

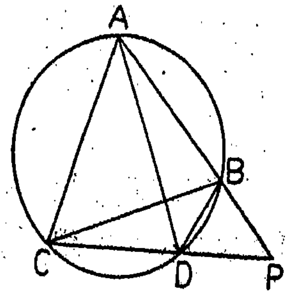
4. $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, $l(AB)=5$, $l(BC)=8$, $l(PQ)=10$ तर, $l(QR)$ची किंमत काढा.

5. सोबतच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे (आ. 3·58) रेख AB व रेख CD ह्या जीवा परस्परांना P बिंदूत छेदतात. तर,
   (i) $\triangle APD$ चे कोणते कोन $\triangle CPB$ च्या कोणत्या कोनांशी एकरूप आहेत त्यांची संगतवार यादी करा.
   (ii) $\triangle APD$ व $\triangle CPB$ समरूप होण्याइतपत ही माहिती आहे काय ?
   (iii) कोणत्या प्रमेयाने $\triangle APD$ व $\triangle CPB$ हे समरूप होतील ? त्यांची कोणती संगती समरूपता असेल ?



आ. 3·58

6. आ. 3·59 मधे दाखवल्याप्रमाणे रेख AB व रेख CD ह्या एकाच वर्तुळाच्या दोन जीवा, अनुक्रमे B व D पलीकडे वाढवल्यानंतर परस्परांस P या बिंदूत छेदतात. तर, पुढील विधाने पूर्ण करा :



आ. 3·59

$\triangle ADP \sim \triangle$ —— कारण $\angle DAB \cong \angle$ ——

$\angle APD \cong \angle BPC$

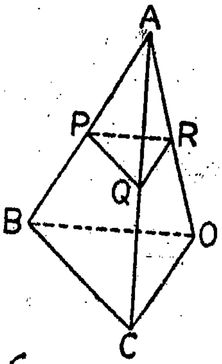
$\angle ADP \cong$ ——

—— समरूपता प्रमेय.

$\therefore \dfrac{l(AP)}{l(PC)} = \dfrac{l(PD)}{l(PB)}$ कारण ——

$\therefore l(—) \times l(PB) = l(—) \times l(DP)$

7. आ. 3·60 मधे, A–BCO ह्या एका त्रिकोणी सूचीच्या पृष्ठ BCO ला समांतर असणारे E हे एक प्रतल रेख AB, रेख AC व रेख AO ह्या कडांना अनुक्रमे P, Q व R या बिंदूंत छेदत असल्याचे दाखवले आहे. पुढील विधानात ती सत्य होतील अशा प्रकारे रिकाम्या जागा भरा.



आ. 3·60

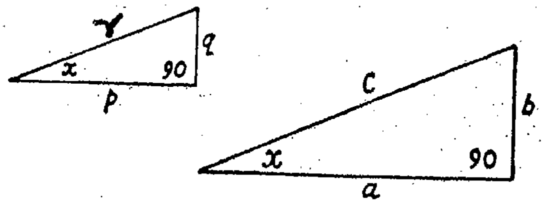
(i) रेख PQ ∥ ——, रेख —— ∥ रेख CO, रेख PR ∥ रेख ——

(ii) $\dfrac{l(AP)}{l(AB)} = \dfrac{l(\ )}{l(BC)} = \dfrac{l(AQ)}{l(\ )}$, $\therefore \triangle APQ \sim \triangle$ —— $\triangle ABC$

(iii) $\dfrac{A(\triangle APQ)}{A(\triangle ABC)} = \left(\dfrac{l(PQ)}{l(BC)}\right)^2$ (iv) $\dfrac{A(\triangle APQ)}{A(\triangle ABC)} = \dfrac{A(\triangle PQR)}{A(\triangle BCO)}$

8. रेख AB व रेख CD हे अनुक्रमे $\triangle AMB$ व $\triangle CND$ या काटकोन त्रिकोणाचे कर्ण आहेत. $m\angle MAB = 66$, $m\angle NCD = 66$ आणि $\dfrac{l(MB)}{l(AB)} = \dfrac{91}{100}$. जर $l(ND) = 45·5$ असेल, तर $l(CD)$ ची किंमत काढा.

9. सोबतची आकृती (आ. 3·61) व तीत दिलेली माहिती यांच्या साहाय्याने पुढील विधाने रिकाम्या जागी योग्य माहिती भरून पूर्ण करा.

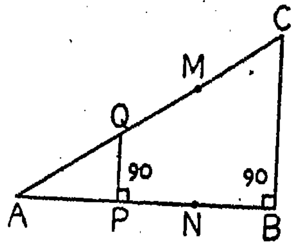


आ. 3·61

(i) $\dfrac{p}{r} = \dfrac{a}{—}$ (ii) जर $\dfrac{q}{r} = \dfrac{3}{8}$ आणि $c = 24$ तर $b =$ ——

10. सोबतची आकृती (आ. 3·62) व तीत दिलेली माहिती यांच्या आधारे (i) सिद्ध करा की $\triangle APQ \sim \triangle ABC$.

(ii) पुढील विधान पूर्ण करा : $\dfrac{l(PQ)}{l(AP)} = \dfrac{—}{l(AB)}$



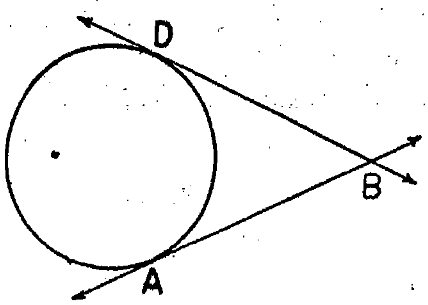
आ. 3·62

प्रकरण 4 : वर्तुळ : बिंदूचे बल

§ 4·1 वर्तुळाची वृत्तछेदिका व स्पर्शिका यांच्या व्याख्या आठवा. वर्तुळाच्या प्रतलातील जी रेषा वर्तुळाला दोन बिंदूत छेदते तिला आपण वृत्तछेदिका म्हणतो; व जी एका बिंदूत छेदते तिला त्या वर्तुळाची स्पर्शिका म्हणतो.

या प्रकरणात आपण वृत्तछेदिका व स्पर्शिका यांच्या एकत्रित गुणधर्मांचा आणखी विचार करणार आहोत. त्यासाठी प्रथम आपण काही नवीन संज्ञा पाहू.

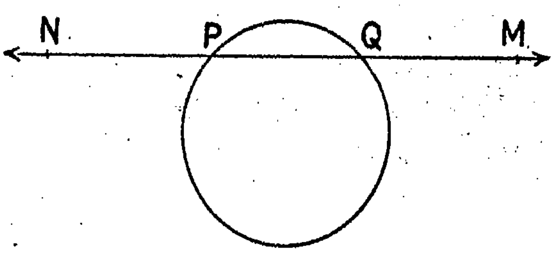
स्पर्शखंड : आ. 4·1 मधे रेषा AB ही वर्तुळाची स्पर्शिका आहे. A बिंदू हा स्पर्शबिंदू असून रेषा AB वरील B बिंदू वर्तुळाच्या बाहेर आहे. रेख BA ला B पासून वर्तुळापर्यंत काढलेला **स्पर्शखंड** (Tangent Segment) म्हणतात. आकृतीत रेख BD हा दुसरा स्पर्शखंड B पासून वर्तुळापर्यंत काढलेला आहे.



आ. 4·1

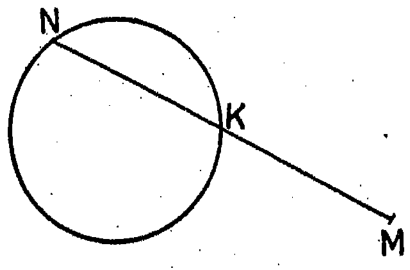
वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदूतून वर्तुळाला किती स्पर्शिका काढता येत असाव्यात असे तुम्हांस वाटते ? मग या बिंदूतून निघणारे जास्तीत जास्त किती स्पर्शखंड त्या वर्तुळाला असू शकतील ?

छेदिकाखंड : आ. 4·2 मधील वृत्तछेदिका MN पाहा. ती वर्तुळाला P व Q ह्या दोन बिंदूत छेदते असे दिसते. आता रेख PM विचारात घ्या. या रेषाखंडाचे P हे एक टोक वर्तुळावर असून दुसरे टोक M, वर्तुळाच्या बाहेर आहे. रेख PQ च्या बाबतीत मात्र त्याची P व Q ही टोके वर्तुळावर आहेत. आकृतीमधे ज्याचे एक टोक वर्तुळावर असून दुसरे टोक वर्तुळाच्या बाहेर आहे असा आणखी एखादा रेषाखंड सांगा.



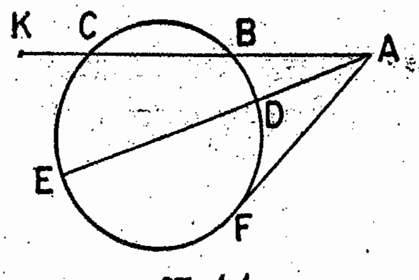
आ. 4·2

रेख PQ ला वर्तुळाची जीवा म्हणतात हे आपल्याला माहीत आहे. रेख MP आणि रेख NQ ह्यांसारख्या रेषाखंडांना **छेदिकाखंड** (Secant Segments) म्हणतात.



आ. 4·3

आ. 4·3 मधे रेख MN हा दिलेल्या वर्तुळाचा छेदिकाखंड आहे. जर एखादा छेदिकाखंड वर्तुळाला दोन भिन्न बिंदूत छेदत असेल आणि या दोन बिंदूंपैकी केवळ एकच बिंदू त्या रेषाखंडाचे एक टोक असेल तर त्या रेषाखंडाला त्या वर्तुळाचा **छेदिकाखंड** म्हणतात.



आ. 4·4

बाजूच्या आकृतीत अनेक रेषाखंडांपैकी फक्त रेख AC, रेख AE व रेख KB हेच रेषाखंड छेदिकाखंड आहेत. रेख AB, रेख AK, रेख CB, रेख ED व रेख AF यांपैकी कोणताच रेषाखंड हा छेदिकाखंड होणार नाही. वर्तुळाच्या बाह्यभागातील एका बिंदूपासून वर्तुळाला असे अनेक छेदिकाखंड काढता येतील हे उघड आहे.

§ 4·2 वर्तुळाच्या दोन स्पर्शखंडांसंबंधी एक गुणधर्म खालील प्रमेयात सांगितला आहे.

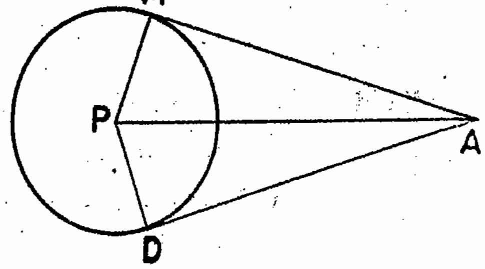
■ **प्रमेय :**

वर्तुळाच्या बाहेरील बिंदूपासून वर्तुळाला काढलेले दोन्ही स्पर्शखंड एकरूप असतात व तो बिंदू आणि वर्तुळाचा केंद्रबिंदू यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाशी ते एकरूप कोन निश्चित करतात.

पक्ष : दिलेल्या वर्तुळाचा P हा केंद्रबिंदू असून A बिंदू वर्तुळाच्या बाहेर आहे. रेख AM व रेख AD हे वर्तुळाचे A मधून काढलेले स्पर्शखंड आहेत.

साध्य : (i) रेख AM ≅ रेख AD

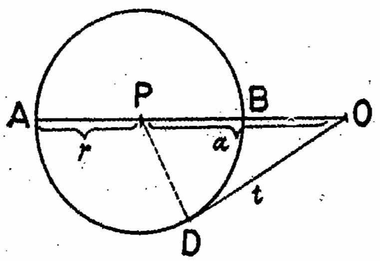
(ii) ∠ MAP ≅ ∠ DAP.



आ. 4·5

सिद्धता : △ PMA व △ PDA हे काटकोन त्रिकोण एकरूप दाखवून प्रमेयाची सिद्धता लिहा.

§ 4·3 खालील आ. 4·6 पाहा. रेख OD दिलेल्या वर्तुळाचा स्पर्शखंड असून रेख OA केंद्रातून जाणारा छेदिकाखंड आहे. वर्तुळाचा केंद्रबिंदू P आहे. O बिंदूचे केंद्रबिंदूपासूनचे अंतर a आहे, वर्तुळाची त्रिज्या r आहे, व रेषा OD या स्पर्शखंडाची लांबी t आहे असे समजा, मग $a^2-r^2=t^2$.



आ. 4·6

आता d (A, O) $=a+r$ आणि d (B, O) $=a-r$.

यावरून, $d\,(A, O)\times d\,(B, O)=(a+r)\,(a-r)$

$=(a^2-r^2)$

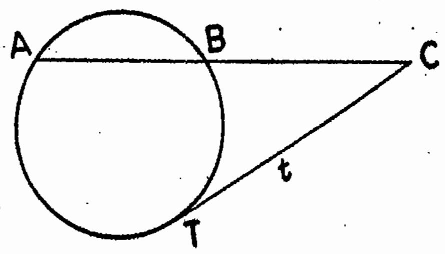
$=t^2$

$=[d\,(O, D)]^2$

वर चर्चिलेल्या भागातील छेदिकाखंड हा, वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूतून जाणारा असा घेतला होता. त्या रेषाखंडाच्या बाबतीत जो गुणधर्म आपल्याला वर दिसून आला तो, वर्तुळाच्या केंद्रातून न जाणाऱ्या छेदिकाखंडाच्या बाबतीतही लागू पडेल का ?

म्हणजे, रेख CA हा वर्तुळाच्या केंद्रातून न जाणारा रेषाखंड आहे. तर,

$d\,(C,A)\times d\,(C,B)=t^2$ असे आपल्याला दाखवता येईल का ?



आ. 4·7

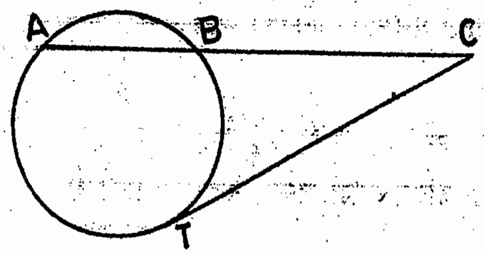
पुढील प्रमेयात या प्रश्नाचे उत्तर होकारार्थी दिले आहे.

■ प्रमेय :

वर्तुळाच्या बाह्यभागात असलेल्या C या कोणत्याही बिंदूपासून, रेख CT हा वर्तुळाला काढलेला स्पर्शखंड असेल, व रेख CA हा छेदिकाखंड असून तो वर्तुळाला A व B बिंदूंत छेदत असेल तर,

$$d(C, A)\times d(C, B)=[d(C, T)]^2$$

किंवा, $l(CA)\times l(CB)=[l(CT)]^2$



आ. 4·8

पक्ष : रेख CA हा C पासून वर्तुळाला काढलेला छेदिकाखंड आहे. तो वर्तुळाला B बिंदूत छेदतो. रेख CT हा वर्तुळाचा स्पर्शखंड आहे.

साध्य : $d(C, A)\times d(C, B)=[d(C, T)]^2$

सिद्धता : $d(C, A)\times d(C, B)=[d(C, T)]^2$ दाखवणे म्हणजेच $\frac{d(C, A)}{d(C, T)}=\frac{d(C, T)}{d(C, B)}$ हे दाखवणे होय. याशाठी $\triangle CBT$ व $\triangle CAT$ समरूप दाखवावे लागतील.

खालील सिद्धतेच्या पायऱ्या दिल्या आहेत. प्रत्येक पायरीला कारण दया.

1. $m\angle CAT=m\angle BTC$ 2. $m\angle ACT=m\angle BCT$

3. $\therefore$ $\triangle CAT$, $\triangle CTB$ ही समरूप आहे.

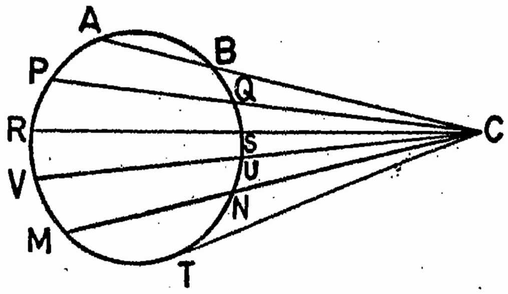
4. $\therefore \frac{l(CA)}{l(CT)}=\frac{l(CT)}{l(CB)}$

5. $\therefore \frac{d(C, A)}{d(C, T)}=\frac{d(C, T)}{d(C, B)}$

6. $\therefore d(C, A)\times d(C, B)=[d(C, T)]^2$

किंवा $l(CA)\times l(CB)=[l(CT)]^2$ हे सिद्ध झाले. म्हणून प्रमेय सिद्ध झाले.

§ 4·4 हे प्रमेय, एकाच बिंदूतून काढलेल्या दोन छेदिकाखंडांमधील संबंध प्रस्थापित करण्यास कसे मदत करते ते पाहू.



आ. 4·9

आ. 4·9 मधे, C बिंदूतून वर्तुळाला काढलेले अनेक छेदिकाखंड दाखवले आहेत. रेख CT हा स्पर्शखंड असून त्याची लांबी t आहे. आपण आताच सिद्ध केलेल्या प्रमेयांनुसार, $d(C, A)\times d(C, B)=t^2$, तसेच, $d(C, M)\times d(C, N)=t^2$. याचाच अर्थ असा की रेख CA किंवा रेख CM किंवा त्या वर्तुळाचा C पासूनचा कोणताही छेदिकाखंड विचारात घेतल्यास वरीलप्रमाणे संबंध दाखवता येईल.

या संबंधांवरून $d(C, A) \times d(C, B) = d(C, M) \times d(C, N)$
$= d(C, P) \times d(C, Q)$ इ०

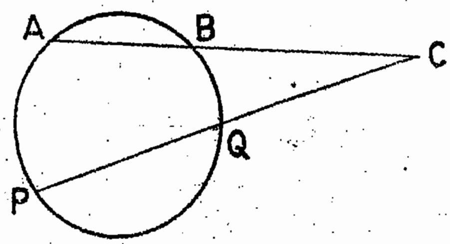
हाच गुणधर्म खालील प्रमेयात मांडला आहे.

■ प्रमेय :

एखादे वर्तुळ व त्याच्या बाह्यभागात असलेला कोणताही बिंदू C दिला आहे. समजा छेदिकाखंड CA हा वर्तुळाला A व B मधे आणि छेदिकाखंड CP हा वर्तुळाला P व Q मधे छेदतो. तर,

$$d(C, A) \times d(C, B) = d(C, P) \times d(C, Q)$$

पक्ष : आ. 4·10 मधे C बिंदू वर्तुळाच्या बाहेर असून रेख CA व रेख CP हे, C पासून वर्तुळाला काढलेले छेदिकाखंड आहेत.

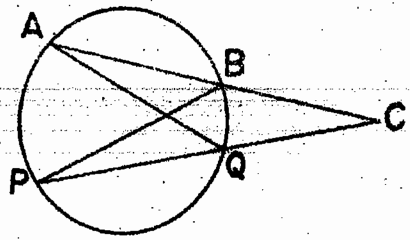


आ. 4·10

साध्य : $d(C, A) \times d(C, B)$
$= d(C, P) \times d(C, Q)$

सिद्धता : आपल्याला $d(C, A) \times d(C, B)$
$= d(C, P) \times d(C, Q)$ दाखवायचे आहे.

त्यासाठी $\dfrac{d(C, A)}{d(C, P)} = \dfrac{d(C, Q)}{d(C, B)}$ हे दाखवता आले तरी पुरेल.



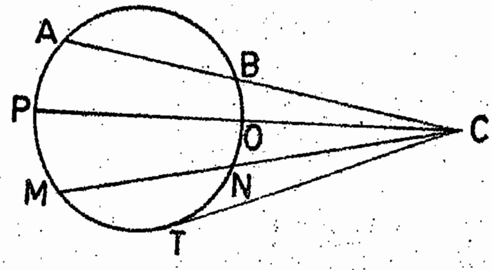
आ. 4·11

$\triangle ACQ$ व $\triangle PBC$ यांच्या समरूपतेवरून हे ओघानेच येते. त्यामुळे हे दोन त्रिकोण समरूप दाखवले तर आपली सिद्धता पूर्ण होईल.

$\angle C$ हा तर समाईक आहे. मग $\angle QAC$ व $\angle BPC$ हे एकरूप दाखवता आले की कोको समरूपता प्रमेयानुसार हे दोन्ही त्रिकोण समरूप होतील. आता, $\angle QAC$ व $\angle BPC$ हे, कंस BAQ ह्या एकाच कंसात आंतरलिखित आहेत. म्हणून ते एकरूप आहेत. त्यामुळे $\triangle ACQ$ व $\triangle PBC$ हे समरूप होतात. यावरून ही सिद्धता पूर्ण झाली.

§ 4·5 § 4·3 मधील चर्चेवरून व त्यानंतर सिद्ध केलेल्या दोन प्रमेयांवरून आपणास खालील गोष्टी माहीत झाल्या.

(i) आ. 4·12 मधे दाखवल्याप्रमाणे जर वर्तुळ व त्याच्या बाहेरील बिंदू C दिला असेल तर C पासून वर्तुळाला काढलेल्या रेख CA या कोणत्याही छेदिकाखंडामुळे मिळणाऱ्या $d(C,A)$ व $d(C, B)$ या दोन अंतरांचा गुणाकार अशा सर्व छेदिकाखंडांसाठी सारखाच असतो.



आ. 4·12

(ii) परिच्छेद (i) मधील दोन अंतरांचा गुणाकार हा, C बिंदूतून वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शखंडाच्या लांबीच्या वर्गाइतका असतो.

याचाच अर्थ असा की $d(C,A) \times d(C,B)$, $d(C,M) \times d(C, N)$ आणि $[d(C,T)]^2$ ह्या संख्या एकत्र संख्या दाखवतात. § 4·3 मधे आपण पाहिले की ही संख्या a^2-r^2 इतकी आहे. येथे r वर्तुळाची त्रिज्या असून a दिलेल्या बिंदूचे वर्तुळकेंद्रापासूनचे अंतर आहे. वर्तुळ व त्याच्या बाहेरील बिंदू माहीत झाल्याबरोबर ही संख्या निश्चित होते. आपण, दिलेल्या वर्तुळाकरता व त्याच्या बाहेर दिलेल्या बिंदूकरता कोणताही छेदिकाखंड अथवा स्पर्शखंड विचारात घेतला तरी जोपर्यंत तो रेषाखंड त्याच दिलेल्या बिंदूतून काढलेला असेल तोपर्यंत ही संख्या बदलत नाही. ह्या संख्येला आपण त्या **बिंदूचे वर्तुळ सापेक्ष बल** (Power of a Point with respect to a Circle) म्हणू.

जसे, $d(C, A)=9$ व $d(C, B)=4$ असेल तर C बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल $9 \times 4=36$ राहील. वर्तुळ व C बिंदूच्या निश्चितीमुळे 36 ही संख्या निश्चित झाल्याने साहजिकच इतर छेदिकाखंडांच्या बाबतीतही,

$d(C, P) \times d(C, O)=36$, $d(C, M) \times d(C, N)=36$

$[d(C, T)]^2=36$ असेल हे स्पष्ट होते.

दिलेल्या वर्तुळाच्या बाह्यभागात C बिंदू असेल आणि त्यामधून जाणारा वर्तुळाचा छेदिकाखंड वर्तुळाला A व B बिंदूत छेदत असेल तर, $d(C, A) \times d(C, B)$ या संख्येला C बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल म्हणतात.

यावरून आपल्याला खालील प्रमेय मांडता येते.

§ 4·6 ■ बिंदूच्या वर्तुळसापेक्ष बलाचे प्रमेय :

दिलेल्या वर्तुळाच्या बाह्यभागात असलेल्या बिंदूचे (त्या वर्तुळाकरता) वर्तुळसापेक्ष बल कायम असते.

आता, मागील परिच्छेदात सिद्ध केलेल्या प्रमेयांची विधाने आठवा. बिंदूच्या वर्तुळसापेक्ष बलाच्या व्याख्येवरून व त्या प्रमेयावरून हे सांगता येईल की ती प्रमेये म्हणजे, बिंदूच्या **वर्तुळसापेक्ष बलाचीच प्रमेये होत.**

खाली दोन उदाहरणे सोडून दाखवली आहेत. त्यांचा अभ्यास करा.

उदा० 1 : आ. 4·13 मधे रेषाखंडांच्या लांबी दाखवल्याप्रमाणे असल्यास m ची किंमत काढा. तसेच S बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल काढा. S पासून वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शखंडाची लांबी किती राहील ?

उत्तर : बिंदूच्या वर्तुळसापेक्ष बलाच्या प्रमेयानुसार $(m+5) \times m=(6+8) \times 6$

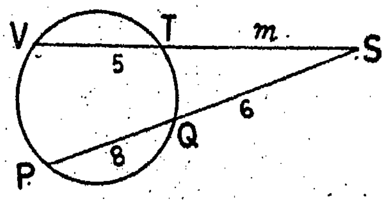
$\therefore m^2+5m-84=0$

हे वर्गसमीकरण सोडवून

$m=-12$ किंवा 7

$m=-12$ अशक्य आहे. म्हणून $m=7$.

आणि S बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल 84 राहील.



आ. 4·13

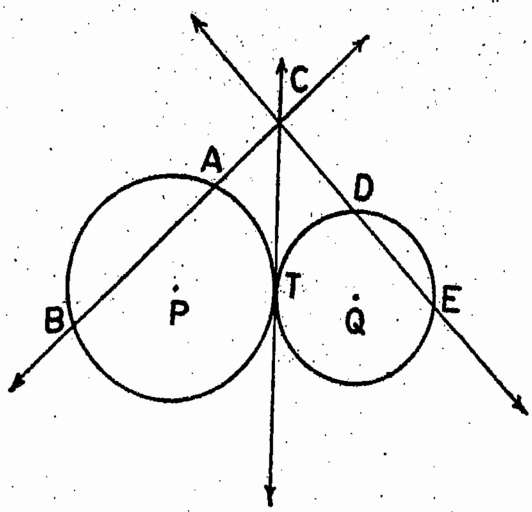
आता S बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल हे S पासून वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शखंडाच्या लांबीच्या वर्गाइतके असते. समजा स्पर्शखंडाची लांबी t आहे.

$\therefore t^2=84$

$\therefore t=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$ राहील.

उदा॰ 2 :

पक्ष : दोन वर्तुळांचे केंद्रबिंदू अनुक्रमे P व Q असून ही वर्तुळे परस्परांना T बिंदूत बाहेरून स्पर्श करतात. C हा त्यांच्या बाह्यभागात बिंदू असून रेषा CB व रेषा CE ह्या वृत्तछेदिका आहेत. रेषा CT ही त्यांची समाईक स्पर्शिका आहे.



आ. 4·14

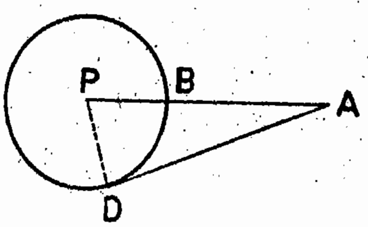
साध्य : C बिंदूचे दोन्ही वर्तुळांच्या बाबतीत वर्तुळसापेक्ष बल कायम आहे. म्हणजेच,
$d(C, B) \times d(C, A) = d(C, E) \times d(C, D)$

सिद्धता :

1. $d(C, B) \times d(C, A) = [d(C, T)]^2$ ...बिंदूच्या वर्तुळसापेक्ष बलाचे प्रमेय.
2. तसेच, $d(C, E) \times d(C, D) = [d(C, T)]^2$
3. $\therefore d(C, B) \times d(C, A) = d(C, E) \times d(C, D)$

§ 4·7 प्रश्न :

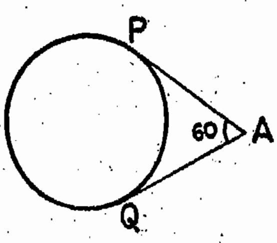
1. आ. 4·15 मधे वर्तुळाचा केंद्र P असून त्रिज्या r आहे.
वर्तुळाच्या बाहेरील A बिंदूपासून वर्तुळाला रेख AD हा स्पर्शखंड काढला आहे.



आ. 4·15

(i) जर $d(A, P) = 20$, $r = 12$ तर $d(A, D)$ काढा.
(ii) जर $d(A, D) = 10$, $d(A, P) = 12$, तर r काढा.
(iii) जर $d(A, D) = 12$, $r = 5$ तर $d(A, P)$ काढा. (iv) जर $d(A, B) = 5$, $r = 5$ तर $d(A, D) = ?$

2. वर्तुळाला, त्याच्या बाहेरील बिंदूतून काढलेले दोन स्पर्शखंड 60 मापाचा कोन निश्चित करतात (आ. 4·16).

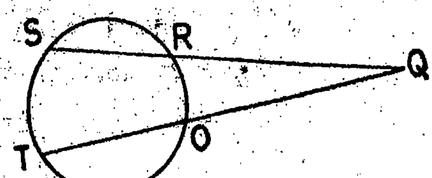


आ. 4·16

(i) सिद्ध करा की हे दोन स्पर्शखंड व त्यांचे स्पर्शबिंदू जोडणारा रेषाखंड यामुळे समद्विभुज त्रिकोण तयार होतो. (ii) वर्तुळाचा व्यास 10 आहे, तर स्पर्शखंडांच्या लांबी किती? (iii) जर त्या दोन स्पर्शखंडांनी निश्चित केलेला कोन 120 असेल तर त्यांच्या लांबी काढा.

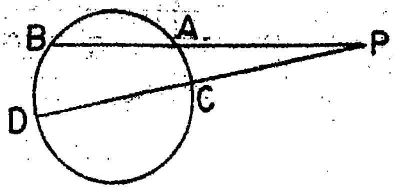
3. आ. 4·17 मध्ये Q बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल दिलेल्या माहितीवरून काढा.

(i) $l(QR)=4, l(QS)=13,$ (ii) $l(QR)=6,$ $l(RS)=8;$ (iii) $l(QT)=17, l(OT)=9;$ (iv) $l\ (QO)=\sqrt{14}\ ,\ l\ (QT)=\sqrt{56}\ ;$ (v) $l(QS)=23, l(RS)=17.$



आ. 4·17

4. आ. 4·18 च्या साहाय्याने खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

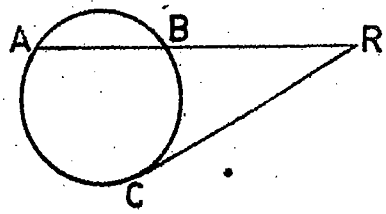


आ. 4·18

(i) $d(P, A)\times d(P, B)=15$ व $d(P, C)=8$ $d(P, D)=$? आणि $d(D, C)=$? (ii) जर $d(P, B)=24, d(A, B)=16$ व $d(P, D)=16,$ $d(P, C)=$? (iii) $d(P, D)=20, d(C, D)=12$ आणि $d(A, B)=27$ तर $d(P, B)=$?

5. आ. 4·19 मधे रेख RA हा वर्तुळाचा छेदिकाखंड आहे आणि रेख RC हा स्पर्शखंड आहे.

(i) जर $d(R, A)=18,\ d(R, B)=8,$ तर $d(R, C)=$? (ii) $d(R, A)=32, d(R, B)=20, d(R, C)=$? (iii) $d(R, B)=4, d(R, C)=10,\ d\ (R, A)=$? (iv) $d(R, B)=8,$ $d(R, C)=12, d(R, A)=$?



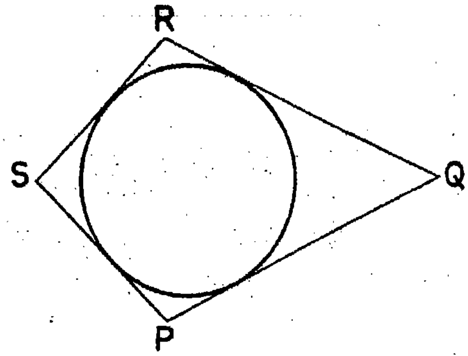
आ. 4·19

6. आ. 4·19 मधे R बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल खालील माहितीवरून काढा व त्यावरून $d\ (R, A)$ $d\ (R, B)$ व $d\ (R, C)$ ह्यांच्या किमती काढा.

जसे, (i) $d\ (R, B)=4,\ d\ (R, A)=9$ तर $d\ (R, C)=6;$ (ii) $d\ (R, A)=13$ आणि $d\ (A, B)=9;$ (iii) $d\ (R, C)=8$ आणि $d\ (A, B)=12.$

7. **पक्ष :** □PQRS च्या बाजू वर्तुळाला स्पर्श करतात (आ. 4·20).

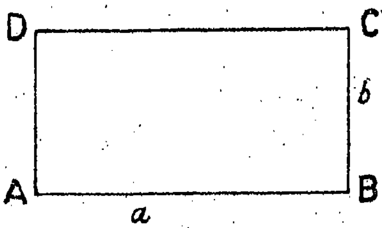
साध्य : $l\ (PQ)+l\ (RS)=l\ (PS)+l\ (QR).$



आ. 4·20

§ 4·8 बिंदूच्या वर्तुळसापेक्ष बलाचा अभ्यास आणखी वेगळ्या दृष्टिकोणातून केल्यास त्याचे महत्त्व कळून येते.

तुम्ही बहुभुजाकृती क्षेत्राच्या क्षेत्रफळासंबंधी अभ्यास केला. 'दिलेल्या क्षेत्राशी निगडित असलेल्या एकमेव धन वास्तव संख्येला त्या क्षेत्राचे क्षेत्रफळ म्हणतात,' अशी आपण क्षेत्रफळाची व्याख्या केली आहे. काटकोन चौकोनी क्षेत्राचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या लगतच्या दोन बाजूंच्या लांबींच्या गुणाकाराइतके असते हे आपण गृहीतक म्हणून मान्य केले आहे.



आ. 4·21

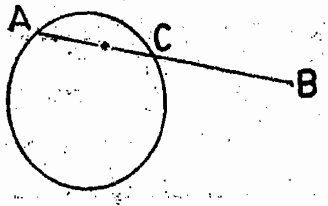
ABCD हा काटकोन चौकोन असून $l(AB)=a$ आणि $l(BC)=b$ आहे असे समजा (आ. 4·21).

तर, □ABCD चे क्षेत्रफळ $=l(AB)\times l(BC)$

$=a\times b$

$=d(B, A)\times d(B,C)$

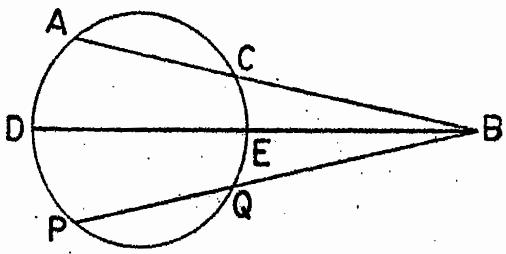
$d(B, A) \times d(B, C)$ हा गुणाकार आपल्या परिचयाचा आहे, दिलेल्या वर्तुळाच्या बाह्यभागात B बिंदू दिला असेल आणि $d(B, A) = a$ व $d(B, C) = b$ असेल तर B बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल $a \times b$ होईल. याचाच अर्थ असा की B बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल दाखवणारी संख्या व ज्या काटकोन चौकोनाच्या दोन लगतच्या बाजूंच्या लांबी $l(BA)$ व $l(BC)$ आहेत, त्या काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळ दाखवणारी संख्या, या समान आहेत. आपण हेही सिद्ध केले आहे की, दिलेल्या वर्तुळाच्या बाहेरील बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल, हे, त्या बिंदूतून वर्तुळाला काढलेल्या कोणत्याही छेदिकाखंडासाठी कायम असते.



आ. 4·22

म्हणून रेख BA व रेख BC, ह्या ज्या काटकोन चौकोनाच्या लगतच्या बाजू आहेत. त्याचे क्षेत्रफळ, रेख BD व रेख BE अथवा रेख BP व रेख BQ यांनी केलेल्या काटकोन चौकोनाच्या क्षेत्रफळाइतके राहील

थोडक्यात, B बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल, काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळ दाखवते.



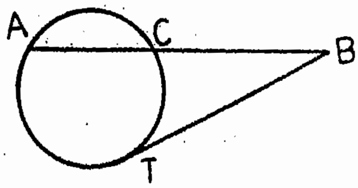
आ. 4·23

त्याचप्रमाणे आपण हेदेखील सिद्ध केले की, वर्तुळाच्या बाहेरील बिंदूचे वर्तुळसाक्षेप बल, त्या बिंदूतून वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शखंडाच्या लांबीच्या वर्गाइतके असते (§ 4·3). आपल्याला माहीत आहे की, चौरसाचे क्षेत्रफळ त्याच्या बाजूच्या लांबीच्या वर्गाइतके असते. वरील दोन विधानांचा समन्वय साधून आपणास असे म्हणता येईल की, वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल दाखवणारी संख्या व त्या बिंदूपासून वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शखंडावरील चौरसाचे क्षेत्रफळ दाखवणारी संख्या समान असतात.

हेच वर्तुळसापेक्ष बल एका काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळदेखील दाखवते हे आपण वर पाहिलेच आहे. या दोन महत्त्वाच्या मुद्द्यांवरून आपण पुढीलप्रमाणे निष्कर्ष काढू शकतो का ते ठरवा.

दिलेल्या वर्तुळाच्या बाह्यभागात बिंदू B आहे (आ. 4·24). रेख BA छेदिकाखंड असून रेख BT स्पर्शखंड आहे.

निष्कर्ष : ज्या काटकोन चौकोनाच्या लगतच्या बाजूंच्या लांबी $l(BA)$ व $l(BC)$ एवढया आहेत त्याचे क्षेत्रफळ, $l(BT)$ एवढी बाजू असलेल्या चौरसाच्या क्षेत्रफळाएवढे असते.



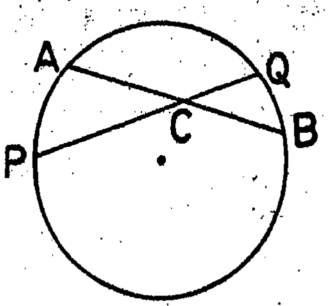
आ. 4·24

या निष्कर्षाचा उपयोग आपल्याला कसा करून घेता येईल ?

समजा एखादया काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळ दिले असेल तर तेवढेच क्षेत्रफळ असलेल्या चौरसाच्या बाजूची लांबी आपल्याला काढता येईल.

§ 4·9 बिंदूच्या वर्तुळसापेक्ष बलाची व्याख्या करताना आपण तो बिंदू वर्तुळाच्या बाहेर घेतला होता. आता तो बिंदू वर्तुळाच्या आत घेतला तर काय होईल ते पाहू.

एखादे वर्तुळ व त्याच्या बाहेरील बिंदू C दिला असेल तर $d(C, A) \times d(C, B)$ ह्या गुणाकाराची किंमत निश्चित होते. (A आणि B हे, C मधून जाणाऱ्या छेदिकाखंडाचे वर्तुळावरील बिंदू होत.) C मधून जाणारे असे वेगवेगळे छेदिकाखंड घेतले तरी ही किंमत तीच राहाते. आता C बिंदू वर्तुळाच्या अंतर्भागात असेल व जर जीवा AB आणि जीवा PQ, परस्परांना C मधे छेदत असतील तर $d(C, A) \times d(C, B) = d(C, P) \times d(C, Q)$ होईल का ? $d(C, A) \times d(C, B)$ हा गुणाकार C मधून जाणाऱ्या कोणत्याही जीवेसाठी सारखाच राहील का ? तो जर सारखाच राहात असेल तर C बिंदू वर्तुळाच्या आत असतानादेखील $d(C, A) \times d(C, B)$ हा गुणाकार म्हणजे C बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल आहे असे आपण म्हणू शकू. पुढील प्रमेयात याचे उत्तर दिले आहे.



आ. 4·25

§ 4·10 ■ बिंदूच्या बलाचे प्रमेय :

वर्तुळाच्या दोन जीवा, रेख AB व रेख PQ, ह्या परस्परांना वर्तुळाच्या आत C बिंदूत छेदत असतील तर $d(C, A) \times d(C, B) = d(C, P) \times d(C, Q)$.

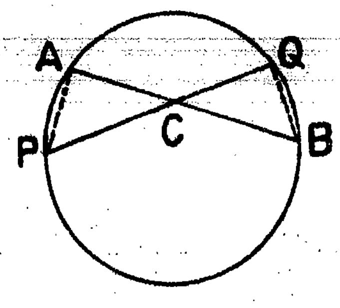
या प्रमेयाची सिद्धता त्रिकोणाच्या समरूपतेच्या गुणधर्मावर आधारलेली आहे. खालील रिकाम्या जागी योग्य शब्द भरून सिद्धता पूर्ण करा (आ. 4·26).

पक्ष : जीवा ——— व जीवा ——— वर्तुळाच्या आंतरभागात परस्परांना ——— बिंदूत छेदतात.

साध्य : ——— = ———

सिद्धता : रेख AP व रेख QB काढा.

1. $\angle PAB \cong \angle PQB$ ... ———
2. $\angle ACP \cong \angle QCB$ ... ———
3. $\therefore \triangle$ ——— $\sim \triangle$ ——— कोको समरूपता प्रमेय.
4. $\therefore \dfrac{l(CA)}{—} = \dfrac{—}{l(CB)}$
5. $\therefore \dfrac{d(C, A)}{—} = \dfrac{—}{d(C, B)}$
6. $\therefore d(C, A) \times d(C, B) =$ ——— × ———



आ. 4·26

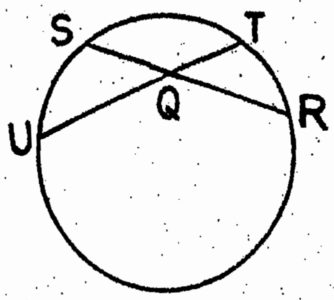
येथे, C बिंदू वर्तुळाच्या आत असताना $d(A, C) \times d(C, B)$ हा गुणाकार कायम असतो हे आपण सिद्ध केले. हा गुणाकार म्हणजेच C बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल होय.

आता आपल्याला सर्वसाधारणतः असे म्हणता येईल की

वर्तुळ व कोणताही बिंदू (वर्तुळाच्या आत अथवा बाहेर) दिला असता त्या बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल कायम असते.

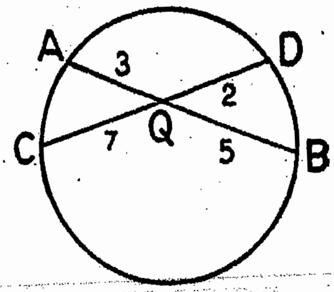
बिंदूच्या वर्तुळसापेक्ष बलाचा, काटकोन चौकोन व चौरस यांच्या क्षेत्रफळाशी असलेला संबंध आपण मागे पाहिला. त्या वेळी आपण बिंदू वर्तुळाच्या बाहेर घेतला होता. बिंदू जर वर्तुळाच्या आत असेल तर तसा संबंध सांगता येईल का? वर्तुळाच्या अंतरभागातील बिंदूतून वर्तुळाला स्पर्शिका काढता येत नाही ही बाब लक्षात घेता त्यापैकी कोणता संबंध अस्तित्वात राहाणार नाही?

§ 4·11 प्रश्न :



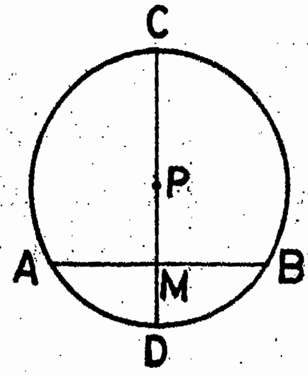
आ. 4·27

1. खाली दिलेल्या माहितीवरून Q बिंदूचे वर्तुळसापेक्ष बल काढा (आ. 4·27).
   (i) $d(Q, S)=9$, $d(Q, R)=5$
   (ii) $d(Q, S)=3$, $d(S, R)=12$
   (iii) $d(Q, U)=7$, $d(Q, T)=5$
   (iv) $d(Q, T)=1$, $d(T, U)=13$



आ. 4·28

2. आ. 4·27 मधे $d(U, T)=25$, $d(U, Q)=18$ व $d(S, R)=27$ असेल तर $d(Q, T)$, $d(S, Q)$ व $d(Q, R)$ ह्यांच्या किमती काढा.
3. दोन जीवा परस्परांना छेदत असतील तर रेषाखंडांच्या लांबी आ. 4·28 मधे दाखवल्याप्रमाणे असणे शक्य आहे का? कारण द्या.
4. आ. 4·29 मध्ये वर्तुळाचा व्यास CD, जीवा AB ला लंब आहे. वर्तुळाची त्रिज्या r आहे.
   (i) जर $d(P, M)=8$ व $r=10$ तर $d(A, B)$ ची किंमत काढा. (ii) जर $d(A, B)=12$ व $r=20$ असेल तर $d(P,M)=?$
5. त्रिज्या 4 असलेल्या वर्तुळाच्या आत M हा एक कोणताही बिंदू घेतला. M मधून जाणारी एक कोणतीही जीवा AB काढली $d(A,M) \times d(M,B)=12$ असेल तर अशा M सारख्या सर्व बिंदूंचा संच काय होईल.



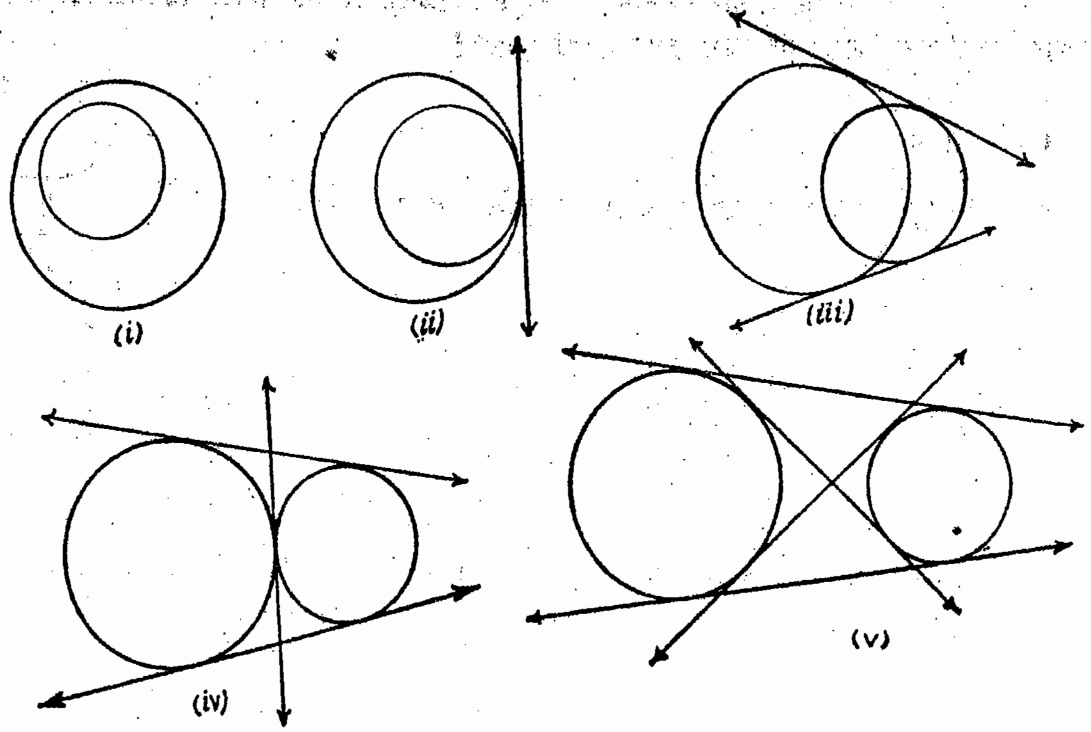
आ. 4·29

§ 4·12 वर्तुळांच्या समाईक स्पर्शिका :

वर्तुळाला, त्याच्या बाहेरील बिंदूतून दोन स्पर्शिका काढता येतात आणि त्याच्या आत असलेल्या बिंदूतून एकही स्पर्शिका काढता येत नाही. आपण आता दोन वर्तुळांच्या समाईक स्पर्शिकांसंबंधी विचार करू. कोणत्या दोन वर्तुळांना समाईक स्पर्शिका काढता येतील? जास्तीत जास्त किती काढता येतील?

या प्रश्नांच्या उत्तरासाठी आपणास दोन वर्तुळांच्या समाईक स्पर्शिकांचे वेगवेगळे पर्याय विचारात घ्यावे लागतील.

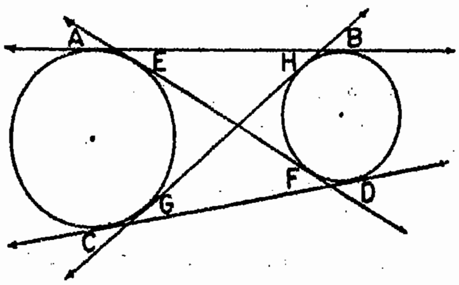
दोन वर्तुळांच्या स्थितींचे सर्व पर्याय आ. 4·30 मधे काढून दाखवले आहेत. शक्य आहे तेथे त्यांच्या समाईक स्पर्शिकाही काढून दाखवल्या आहेत.



आ. 4·30

आकृती क्रमांक	वर्तुळांचे वर्णन	समाईक स्पर्शिकांची संख्या
(i)	एक वर्तुळ पूर्णपणे दुसऱ्या वर्तुळाच्या अंतर्भागात सामावलेले आहे.	एकही नाही
(ii)	एक वर्तुळ दुसऱ्याला आतून स्पर्श करते.	एक
(iii)	दोन वर्तुळे परस्परांना दोन भिन्न बिंदूत छेदतात.	दोन
(iv)	दोन वर्तुळे परस्परांना बाहेरून स्पर्श करतात.	तीन
(v)	दोन वर्तुळे परस्परांना छेदत नाहीत व दोन्ही परस्परांच्या बाह्यभागात आहेत.	चार

§ 4·13 आकृतीत (v) पुन्हा खाली दाखवली आहे. तिचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा.



आ. 4·31

आ. 4·31 मधे दाखवलेल्या चार स्पर्शिकांपैकी स्पर्शिका AB अशी आहे की, हिच्या एकाच अंगास दोन्ही वर्तुळांचे केंद्रबिंदू आहेत. दुसरी स्पर्शिका CD देखील अशीच आहे. अशा समाईक स्पर्शिकांना आपण दिलेल्या वर्तुळांच्या **समाईक बाह्य-स्पर्शिका** (Direct Common Tangents or Common External Tangents) म्हणू.

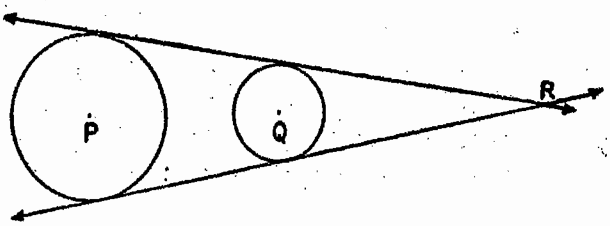
आता समाईक स्पर्शिका EF पाहा. वर्तुळांचे केंद्रबिंदू या स्पर्शिकेच्या विरुद्ध अंगास आहेत. अशा समाईक स्पर्शिकेला आपण **समाईक आंतरस्पर्शिका** (Transverse Common Tangent or Common Internal Tangent) म्हणू.

आकृतीमधे वर्तुळांची दुसरी समाईक आंतरस्पर्शिका आता तुम्हांला सांगता येईल का?

असे दिसते की, ह्या वर्तुळांची समाईक बाह्यस्पर्शिका, वर्तुळांच्या केंद्रांना जोडणाऱ्या रेषेला त्या दोन केंद्रांच्या दरम्यान छेदत नाही पण त्यांची समाईक आंतरस्पर्शिका मात्र दोन केंद्रांच्या दरम्यान छेदते. दोन वर्तुळे परस्परांना बाहेरून स्पर्श करीत असतील तर त्यांना एकच समाईक आंतरस्पर्शिका असते आणि त्यांच्या समाईक बाह्यस्पर्शिका, ती वर्तुळे एकरूप असतील तेव्हा, परस्परांना समांतर असतात आणि ती वर्तुळे एकरूप नसल्यास परस्परांना छेदतात. दोन वर्तुळे परस्परांना आतून स्पर्श करीत असतील तर त्यांच्या बाबतीत समाईक आंतरस्पर्शिका असणार नाही हे उघड आहे. समाईक बाह्यस्पर्शिका मात्र एक असते. परस्परांच्या बाह्यभागात असलेली वर्तुळे परस्परांना स्पर्श करीत नसतील तर मात्र त्यांच्या समाईक आंतरस्पर्शिका परस्परांना छेदतातच, मग ती वर्तुळे एकरूप असोत अथवा नसोत. त्यांच्या समाईक बाह्यस्पर्शिका मात्र, ती वर्तुळे एकरूप असल्यास समांतर असतात.

§ 4·14 प्रश्न :

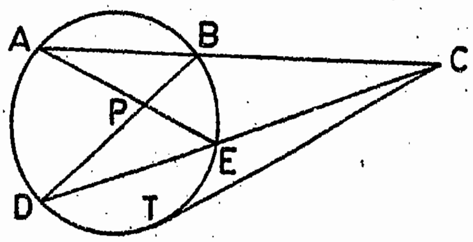
1. अनुक्रमे 5 आणि 17 त्रिज्या असलेल्या दोन वर्तुळांच्या समाईक बाह्यस्पर्शिकाखंडांची लांबी 16 आहे. तर त्यांच्या केंद्रांमधील अंतर काढा.
2. दोन वर्तुळांच्या केंद्रांमधील अंतर 18 असून त्यांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 3 व 6 आहेत. त्यांच्या समाईक आंतरस्पर्शिकाखंडांच्या लांबी काढा.
3. दोन वर्तुळांचे समाईक बाह्यस्पर्शिकाखंड एकरूप असतात हे सिद्ध करा.
4. परस्परांच्या बाह्यभागात असलेल्या दोन वर्तुळांचे केंद्र अनुक्रमे P व Q आहेत (आ. 4·32). त्यांच्या समाईक बाह्यस्पर्शिका परस्परांस R मध्ये छेदतात. P, Q आणि R हे बिंदू एकरेषीय आहेत हे सिद्ध करा.



आ. 4·32

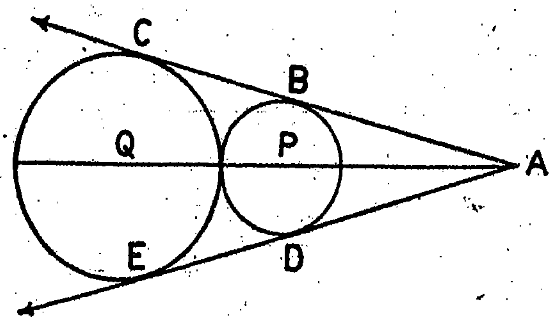
स्वाध्याय :

1. आ. 4·33 मधील माहितीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे दया.
(i) $l(AB)=8$, $l(BC)=6$, $l(CE)=7$ $l(DC)=$? (ii) $l(CT)=6$, $l(DE)=5$ $l(CE)=$? (iii) $l(AP)=5$, $l(EP)=4$ तर P चे वर्तुळसापेक्ष बल काय? (iv) $l(DP)=3$, $l(DB)=5$ तर P चे वर्तुळसापेक्ष बल काय होईल? (v) $l(CT)=2\sqrt{3}$ तर C चे वर्तुळसापेक्ष बल किती?



आ. 4·33

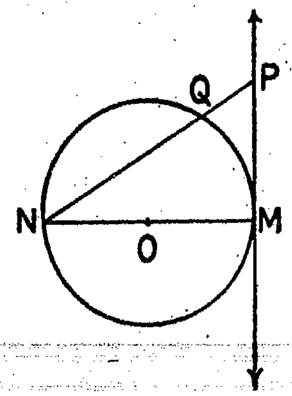
2. उदा० 1 मधील आकृतीच्या आधारे, खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत ते सांगा.
(i) $l(AC)=7$, $l(BC)=6$, $l(DC)=14$, $l(CE)=3$; (ii) $l(CT)=36$, $l(AC)=9$, $l(AB)=5$; (iii) $l(AP)=m$, $l(PE)=m+3$, $l(DP)=m+2$, $l(PB)=m+1$; (iv) $l(AC)=m+2$, $l(BC)=5$, $l(CD)=m+1$, $l(EC)=2$.

3. 

आ. 4·34

आ. 4·34 मधे P आणि Q ही केंद्रे असलेली दोन वर्तुळे बाहेरून स्पर्श करतात. त्यांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 6 व 2 आहेत, तर खालील रेषाखंडांची लांबी काढा.
(i) रेख QP, (ii) रेख BC,
(iii) रेख AQ, (iv) रेख AB.

4. **पक्ष :** रेख MN हा वर्तुळाचा व्यास आहे. वर्तुळाचा केंद्र O असून त्रिज्या r आहे. M पाशी रेषा PM ही वर्तुळाची स्पर्शिका आहे. वृत्तछेदिका PN, वर्तुळाला Q मधे अशा तऱ्हेने छेदते की, Q हा, P आणि N च्या दरम्यान आहे.
साध्य : $l(PN)\times l(QN)=4r^2$



आ. 4·35

5. **पक्ष :** रेख AB व रेख CD परस्परांना P मधे छेदतात.
$l(AP)\times l(BP)=l(CP)\times l(DP)$
साध्य : A, C, B व D हे बिंदू एका वर्तुळावर आहेत.

6. $\triangle$ ABC मधे, रेख AD, रेख BE व रेख CF हे अनुक्रमे A, B व C पासून त्यांच्या समोरील बाजूंवर काढलेले लंब आहेत. हे लंब M ह्या एकाच बिंदूत मिळतात. सिद्ध करा की, $l(AM)\times l(MD)=l(BM)\times l(ME)=(CM)\times l(MF)$

7. उदा. 6 मधे दिलेल्या माहितीवरून सिद्ध करा.
(i) $l(AB)\times l(AF)=l(AC)\times l(AE)$;
(ii) $[\, l(BC)\,]^2=l(AB)\times l(BF)+l(AC)\times l(CE)$

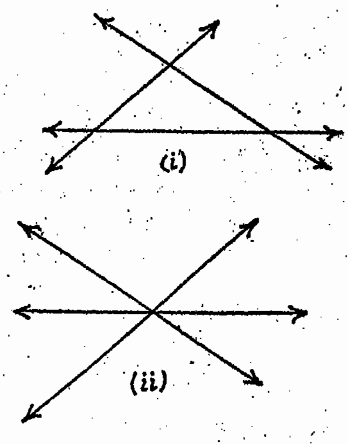
प्रकरण 5 : एकसंपात

§ 5·1 जर दोन भिन्न रेषा परस्परांस छेदत असतील तर त्या एकाच बिंदूत छेदतात. दुसऱ्या शब्दांत, छेदणाऱ्या रेषांना फक्त एकच बिंदू समाईक असतो.

आता एकाच प्रतलातील तीन भिन्न रेषांचा आपण विचार करू. या रेषा समांतर असतील तर त्या परस्परांना छेदणार नाहीत हे ठीक. पण यापैकी कोणत्याच दोन रेषा समांतर नसतील तर त्या तीन रेषा

परस्परांना कशा तऱ्हेने छेदतील? या बाबतीत दोन पर्याय असू शकतात.

जेव्हा त्या रेषा आ. 5·1 (i) मधे दाखवल्याप्रमाणे छेदतात तेव्हा त्या एक त्रिकोण निश्चित करतात. येथे जरी त्या रेषा परस्परांना जोडीने छेदत असल्या तरी त्या सर्वांना समाईक असा एकही बिंदू नाही. आ. 5·1 (ii) मधे त्या तीन रेषा एका बिंदूत छेदताना दिसतात. या ठिकाणी हा छेदनबिंदू तीनही रेषांना समाईक आहे. अशा वेळी त्या तीन रेषा एकसंपाती आहेत असे म्हणतात.



आ. 5·1

व्याख्या :

ज्या वेळेस तीन अथवा अधिक रेषांना समाईक असलेला केवळ एकच बिंदू असतो त्यावेळी त्या रेषा **एकसंपाती** (Concurrent) आहेत असे म्हणतात व त्यांच्या समाईक बिंदूला त्या रेषांचा **संपात बिंदू** (Point of Concurrence) म्हणतात.

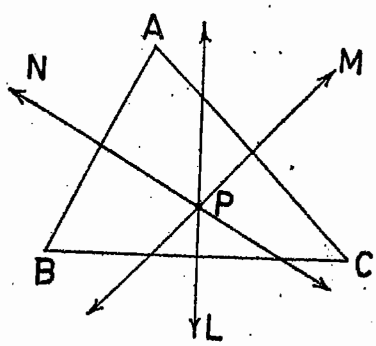
रेषांच्या एकसंपाताचा अभ्यास फार मनोरंजक आहे. त्रिकोणाशी निगडित असलेल्या व काही विशेष गुणधर्म असलेल्या रेषांची, किरणांची व रेषाखंडांची ओळख आपल्याला आहे. उदाहरणार्थ, त्रिकोणाच्या बाजूंच्या तीन लंबदुभाजक रेषा, त्रिकोणाचे तीन कोनदुभाजक, त्रिकोणाचे तीन शिरोलंब इ. त्रिकोणाचे हे प्रत्येकी तीन बिंदु-संच (रेषा, रेषाखंड अथवा किरण) परस्परांना छेदणार हे तर निश्तिच. पण ते कशा प्रकारे छेदतात? ते, आ. 5·1 (i) मधे दाखवल्याप्रमाणे छेदतात की, आ. 5·1 (ii) मधे दाखवल्याप्रमाणे? दुसऱ्या शब्दात, ते एकसंपाती आहेत की नाहीत? आपल्याला हे कळणे मौजेचे वाटेल की त्रिकोणांच्या बाजूंचे तीनही लंबदुभाजक एकसंपाती असतात, कोनदुभाजक एकसंपाती असतात आणि शिरोलंबही एकसंपाती असतात. या गुणधर्मांमुळे जे काही उपयुक्त निष्कर्ष आपणास काढता येतील ते आपण वेळोवेळी पाहूच. प्रथम आपण त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लंबदुभाजकरेषांच्या एकसंपाताचा विचार करू.

§ 5·2 ■ प्रमेय : लंबदुभाजकांचा एकसंपात

त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लंबदुभाजकरेषा एकसंपाती असतात.

पक्ष : समजा रेषा L, रेषा M व रेषा N △ ABC च्या अनुक्रमे बाजू BC, बाजू AC व बाजू AB ह्यांच्या लंबदुभाजक रेषा आहेत (आ. 5·2).

साध्य : रेषा L, रेषा M व रेषा N एकसंपाती आहेत.



आ. 5·2

सिद्धता : परस्परांना छेदणाऱ्या बाजू BC व बाजू AC यांच्या लंबदुभाजकरेषा अनुक्रमे L व M आहेत. त्यादेखील परस्परांना छेदणारच. (तुम्हांला हे मान्य आहे ना?) त्यांचा छेदनबिंदू P आहे. म्हणजे, बिंदू P हा, रेषा L व रेषा M ह्यांना समाईक आहे. रेषा L, रेषा M व रेषा N एकसंपाती आहेत हे सिद्ध करणे म्हणजे या तीनही रेषांना केवळ एकच समाईक बिंदू आहे हे सिद्ध करणे होय. त्यासाठी, रेषा L व रेषा M यांना समाईक

असलेला P बिंदू, रेषा N वरदेखील आहे हे दाखवले की झाले. तो बिंदू, रेषा N वर आहे हे दाखवण्यासाठी तो, A आणि B ह्या बिंदूंपासून समदूर आहे हे दाखवणे पुरेसे होईल. तेवढे आता दाखवू या.

P बिंदू रेख BC च्या लंबदुभाजकावर आहे. ∴ P हा, B आणि C पासून समदूर आहे. तसेच P बिंदू रेख AC च्या लंबदुभाजकावर आहे, म्हणून तो A व C पासून समदूर आहे. यावरून P बिंदू, A आणि B पासून समदूर आहे हे सिद्ध झाले.

म्हणजे, रेषा L, रेषा M व रेषा N एकसंपाती आहेत, हे सिद्ध झाले.

वरील प्रमेयावरून हे स्पष्ट होते की लंबदुभाजकांचा संपातबिंदू P, त्रिकोणाच्या सर्व शिरोबिंदूपासून समदूर आहे. दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे म्हणजे, त्रिकोणाचे शिरोबिंदू A, B व C, P पासून समान अंतरावर आहेत. ज्या बिंदूसंचातील प्रत्येक बिंदू, दिलेल्या बिंदूपासून समान अंतरावर असतो त्या एका प्रतलातील बिंदूसंचाला आपण काय नाव दिले आहे? वर्तुळाची व्याख्या आठवा.

P बिंदू हा केंद्र समजल्यास A, B व C या तीनही बिंदूंतून जाणारे एक तरी वर्तुळ काढता येईल का? काढता येत असल्यास अशी किती वर्तुळे काढता येतील?

या चर्चेवरून आपणास खालील उपप्रमेय मांडता येते.

§ 5·3 ▪ उपप्रमेय 1 :

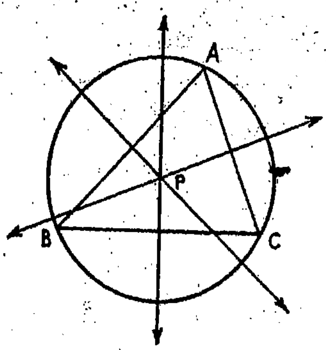
एका रेषेत नसलेल्या कोणत्याही तीन बिंदूंतून एक व एकच वर्तुळ जाते.

सिद्धता : समजा A, B व C हे तीन नैकरेषीय बिंदू आहेत. हे तीन बिंदू एक त्रिकोण निश्चित करतात. त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लंबदुभाजकरेषा एकसंपाती असतात आणि त्यांचा संपातबिंदू त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासून समदूर असतो, हे आपण सिद्ध केलेच आहे. म्हणजेच A, B व C या तिनही बिंदूपासून समदूर असलेला एक तरी बिंदू असतोच. यावरून A, B व C मधून जाणारे **एक तरी** वर्तुळ असते, हे सिद्ध झाले.

आता आपण अशी वर्तुळे एकापेक्षा जास्त असूच शकत नाहीत, असे सिद्ध करू.

त्याच तीन बिंदूंतून, म्हणजे A, B व C मधून जाणारे दुसरेही एक वर्तुळ आहे असे समजा. ह्या दुसऱ्या वर्तुळाचा केंद्र व पहिल्या वर्तुळाचा केंद्र एकच असणार नाही. कारण ह्या दोन समान त्रिज्यांच्या वर्तुळांचे केंद्रही एकच असेल तर ती दोन भिन्न वर्तुळे होणार नाहीत. या दुसऱ्या वर्तुळाचा केंद्र देखील वर्तुळाच्या व्याख्येनुसार, A, B व C पासून समदूर राहील. म्हणजेच, त्रिकोण ABC च्या दोन बाजूंचे लंबदुभाजक या दुसऱ्या वर्तुळाच्या केंद्रातदेखील छेदतात. याचा अर्थ असा की, △ABC च्या दोन बाजूंचे लंबदुभाजक परस्परांना दोन बिंदूंत छेदतात. पण हे शक्य नाही, कारण दोन रेषा परस्परांना एकापेक्षा जास्त बिंदूंत छेदू शकत नाहीत. म्हणून, 'A, B व C मधून जाणारे दुसरेही एक वर्तुळ आहे', हे जे आपण गृहीत धरले होते ते असत्य आहे. ∴ A, B व C मधून फक्त एकच वर्तुळ जाते.

आ. 5·3 मधे, $\triangle ABC$ च्या बाजूंच्या लंबदुभाजकांचा संपातबिंदू, A, B व C मधून जाणाऱ्या वर्तुळाचा केंद्र आहे. रेख PA, रेख PB व रेख PC त्या वर्तुळाच्या त्रिज्या होतील. $\triangle ABC$ च्या A, B व C ह्या शिरोबिंदूंमधून जाणाऱ्या वर्तुळाला त्या त्रिकोणाचे **परिवर्तुळ** (Cicumscribing Circle or Circumcircle) म्हणतात. या वर्तुळाच्या केंद्राला (इथे बिंदू P) **परिकेंद्र** (Circumcentre) म्हणतात.



आ. 5·3

[टीप : जेव्हा P बिंदूचा उल्लेख आपण 'परिकेंद्र' असा करतो, तेव्हा तो उल्लेख ज्या परिवर्तुळाचा P हा केंद्र आहे त्या वर्तुळाच्या संदर्भात केलेला असतो. तेव्हा P चा उल्लेख 'लंबदुभाजकांचा संपातबिंदू' असा केला जातो तेव्हा तो त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लंबदुभाजकांचा संपातबिंदू, या संदर्भात असतो. मात्र ही दोन्ही वर्णने एकाच बिंदूची (इथे P) आहेत हे लक्षात घ्या.]

§ 5·4 ■ उपप्रमेय 2 :

दोन भिन्न वर्तुळे परस्परांना छेदत असतील तर ती जास्तीत जास्त दोन बिंदूंत छेदतात.

सिद्धता : जर उपप्रमेयात दिलेले विधान सत्य नसेल तर ती दोन वर्तुळे परस्परांना छेदत असल्यास निदान तीन बिंदूंत छेदतात असे समजा.

यात दोन पर्याय संभवतात. (i) हे तीन बिंदू एकरेषीय असतील (ii) हे तीन बिंदू एकरेषीय नसतील.

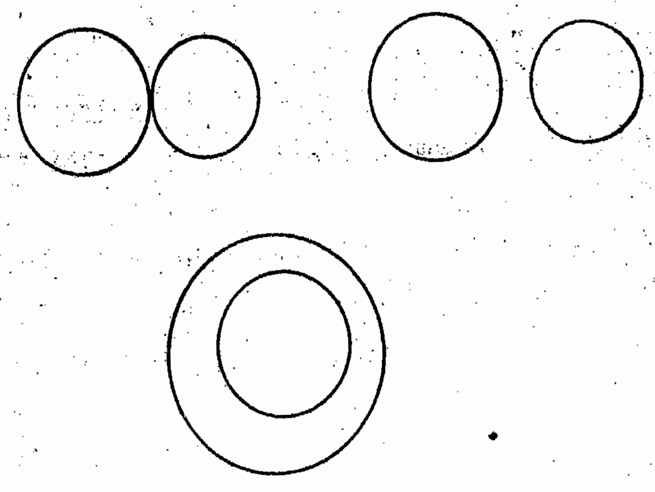
पर्याय (i) : हे तीन बिंदू एकरेषीय असले तर ते एका वर्तुळावर असणे शक्य नाही. कारण § 1·16 मधील उपप्रमेय 2 अनुसार वर्तुळावरील कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नसतात. पण हे बिंदू वर्तुळावर आहेत असे आपणास दिलेले आहे. म्हणून हा पर्याय निकालात निघाला.

पर्याय (ii) : हे तीन बिंदू नैकरेषीय असतील तर नुकत्याच सिद्ध केलेल्या § 5·3 मधील उपप्रमेय 1 अनुसार, या तीन नैकरेषीय बिंदूंतून एक व एकच वर्तुळ जाते. म्हणून हे तीन बिंदू दोन भिन्न वर्तुळांवर असणे शक्य नाही. पण हे पक्षाशी विसंगत कारण आहे. आपणास दिलेली दोन वर्तुळे भिन्न आहेत.

यावरून, दिलेली दोन भिन्न वर्तुळे परस्परांना तीन बिंदूंत छेदतात हे जे आपण गृहीत धरले होते ते असत्य आहे.

म्हणून दोन भिन्न वर्तुळे परस्परांना (छेदत असल्यास) जास्तीत जास्त दोन बिंदूंत छेदतात.

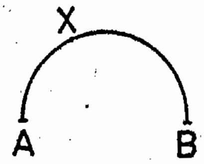
[अर्थात दोन भिन्न वर्तुळे परस्परांना एका बिंदूत छेदणे शक्य आहे. अशा वेळेस ती परस्परांना स्पर्श करतात असे आपण म्हणतो. तसेच ती परस्परांना अजिबात छेदणार नाहीत हेही शक्य आहे. (आ. 5·4 पाहा.) पण जर ती छेदत असतील तर दोनपेक्षा जास्त बिंदूंत छेदणार नाहीत हे, वरील उपप्रमेयावरून दिसते.]



आ. 5·4

5·5 प्रश्न :

1. तुमच्या वहीवर वेगवेगळ्या आकाराचे लघुकोन त्रिकोण, विशालकोन त्रिकोण, काटकोन त्रिकोण काढा. प्रत्येक त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक काढा व ते एकसंपाती आहेत याचा पडताळा घ्या. या तीन प्रकारच्या त्रिकोणांतील संपातबिंदूंच्या स्थानांचे निरीक्षण करा. कोणत्या त्रिकोणांच्या बाबतीत हे संपातबिंदू त्रिकोणाच्या अंतर्भागात आहेत ? कोणत्या त्रिकोणांच्या बाबतीत ते बाह्यभागात आहेत ? काटकोन त्रिकोणाच्या बाबतीत त्यांचे स्थान कोठे असते ? संपातबिंदू हा केंद्र समजून या सर्व त्रिकोणांची परिवर्तुळे काढा.
2. एका वर्तुळावर तीन बिंदू आहेत. त्या तीन बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडामुळे एक त्रिकोण तयार केल्यास या त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लंबदुभाजकांचा संपातबिंदू कुठे असेल ?
3. दिलेल्या प्रतलात तीन बिंदू आहेत. ह्या तीन बिंदूंपासून समदूर असलेला बिंदू निश्चित होण्यासाठी त्या बिंदूंनी कोणती अट पाळणे आवश्यक आहे ? जर ही अट पाळली गेली तर तो बिंदू कसा निश्चित कराल ?
4. आ. 5·5 मधे एका वर्तुळाचा, कंस AXB दिला आहे. तर ते वर्तुळ कसे पूर्ण कराल ?



आ. 5·5

5. चक्रीय चौकोनाच्या चारही बाजूंचे लंबदुभाजक एकसंपाती असतात हे सिद्ध करा.
6. उदा० 5 मधे, चक्रीय चौकोनाच्या कर्णांचे लंबदुभाजकही, बाजूंच्या लंबदुभाजकांच्या संपातबिंदूतून जातात हे सिद्ध करा.

§ 5·6 शिरोलंबाचा एकसंपात :

त्रिकोणाच्या शिरोलंबाची व्याख्या आठवा. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूतून त्याच्या समोरील बाजू समाविष्ट करणाऱ्या रेषेवर काढलेल्या लंबरेषाखंडास त्या त्रिकोणाचा शिरोलंब म्हणतात. ह्या व्याख्येत 'शिरोलंब' ही संज्ञा आपण रेषाखंडाकरता वापरली आहे. आता आपल्या सोयीकरता आपण या संज्ञेचा उपयोग दुसऱ्या अर्थाने करू. 'शिरोलंब' हा शब्द केवळ लंबरेषाखंड या अर्थाने न वापरता तो, 'हा लंब समाविष्ट करणारी रेषा' या अर्थानेही वापरू.

पुढे दिलेले विधान वाचा.

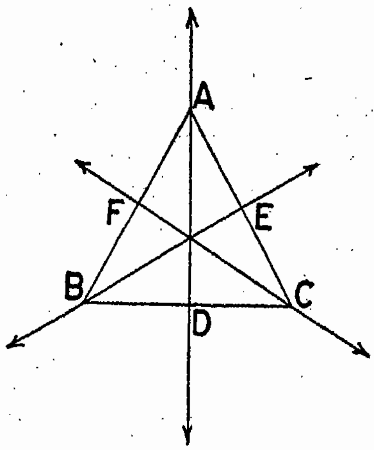
'त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूच्या समोरील बाजू समाविष्ट करणाऱ्या रेषेवर, त्या शिरोबिंदूतून काढलेल्या लंबरेषेस त्या त्रिकोणाचा शिरोलंब म्हणतात.'

या विधानात 'शिरोलंब' ही संज्ञा रेषेला उद्देशून वापरली आहे. या दुसऱ्या अर्थानेही त्रिकोणाला एकूण तीन शिरोलंब असतात. त्रिकोणाच्या तीन शिरोलंबांच्या एकसंपाताचे विधान पुढील प्रमेयात केले आहे.

§ 5·7 ▪ प्रमेय : शिरोलंबाचा एकसंपात

त्रिकोणाचे शिरोलंब एकसंपाती असतात.

दिलेला त्रिकोण लघुकोन त्रिकोण असेल, विशालकोन त्रिकोण असेल अथवा काटकोन त्रिकोण असेल. लघुकोन त्रिकोणाच्या बाबतीतील सिद्धता खाली दिली आहे.

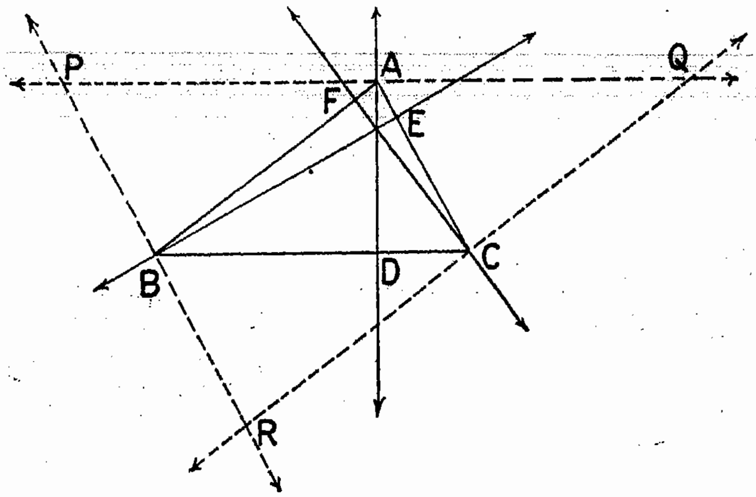


आ. 5·6

पक्ष : $\triangle ABC$ हा दिलेला लघुकोन त्रिकोण असून रेषा AD, रेषा BE व रेषा CF, त्यांचे शिरोलंब आहेत.

साध्य : रेषा AD, रेषा BE व रेषा CF एकसंपाती आहेत.

सिद्धता : त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक एकसंपाती असतात हे आपण पाहिले. म्हणून जर आपल्याला, ह्या त्रिकोणाचे शिरोलंब, कोणत्यातरी दुसऱ्या एका त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक आहेत, हे दाखवता आले तर आपण हे प्रमेय सिद्ध केले असे होईल.



आ. 5·7

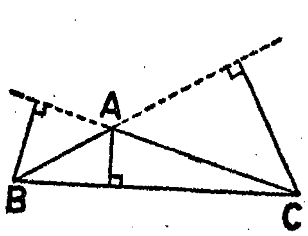
पुढे एका रकान्यात प्रश्न विचारला असून दुसऱ्या रकान्यात त्याचे उत्तर दिले आहे. या प्रश्नांचा व त्यांच्या उत्तरांचा नीट अभ्यास करा व नंतर सिद्धता लिहून काढा.

1. रेख BC ला समांतर असलेली व A बिंदूतून जाणारी एकच रेषा काढता येते या विधानाला आधार कोणता?	1. समांतर रेषेचे गृहीतक.
2. आ. 5·7 मधे अशी रेषा काढून दाखवली आहे. आकृतीत या रेषेचे काय नाव आहे?	2. रेषा PQ
3. अशा तऱ्हेने B व C मधून जाणाऱ्या व अनुक्रमे रेख AC आणि रेख AB ला समांतर असणाऱ्या कोणत्या रेषा आकृतीत दाखवल्या आहेत?	3. अनुक्रमे रेषा PR व रेषा QR.

4. रेषा PQ, रेषा QR व रेषा PR यांच्यामुळे कोणता त्रिकोण निश्चित झाला ?	4. $\triangle$ PQR.
5. $\square$ BCQA हा कोणता चौकोन झाला ?	5. समांतरभुज चौकोन
6. यावरून रेख AQ व रेख BC यांच्या लांबीत काय संबंध सांगता येतो ?	6. $l\,(AQ) = l\,(BC)$
7. $\square$ PACB हा कोणता चौकोन होतो ?	7. समांतरभुज चौकोन.
8. त्यावरून रेख PA व रेख BC यांच्या लांबीत कोणता संबंध सांगता येतो ?	8. $l\,(PA) = l\,(BC)$
9. 6 व 8 वरून रेख PA व रेख AQ यांच्या लांबीत कोणता संबंध आहे ?	9. $l\,(PA) = l\,(AQ)$
10. यावरून रेख PQ च्या बाबतीत A बिंदूला काय म्हणता येईल ?	10. मध्यबिंदू.
11. रेषा PQ $\parallel$ रेख BC आहे आणि रेषा AD $\perp$ रेख BC आहे. म्हणून रेषा PQ व रेषा AD यांच्यात काय संबंध सांगता येईल ?	11. रेषा AD $\perp$ रेषा PQ
12. आता रेषा AD $\perp$ रेषा PQ आणि बिंदू A, रेख PQ चा मध्यबिंदू आहे. मग रेख PQ च्या बाबतीत रेषा AD, कोणती रेषा होईल ?	12. लंबदुभाजक रेषा.
13. त्याचप्रमाणे रेषा BE व रेषा CF, $\triangle$ PQR च्या अनुक्रमे कोणत्या बाजूंचे लंबदुभाजक होतील ?	13. बाजू PR व बाजू QR
14. अशातऱ्हेने रेषा AD, रेषा BE व रेषा CF, $\triangle$ PQR च्या बाजूंचे लंबदुभाजक आहेत हे आपण दाखवले यावरून हे प्रमेय सिद्ध झाले.	

आता विशालकोन त्रिकोण व काटकोन त्रिकोण यांच्या बाबतीत सिद्धता तुम्ही लिहा.

[टीप : वरील प्रमेयात 'शिरोलंब' या शब्दाचा अर्थ 'शिरोबिंदूतून समोरील बाजू सामावणाऱ्या रेषेवर काढलेली **लंबरेषा** असा घेतला आहे हे पुन्हा लक्षात घ्या. जर 'शिरोलंब' या शब्दाचा अर्थ रेषाखंड असा घेतला तर विशालकोन त्रिकोणाच्या बाबतीत वर सांगितलेले प्रमेय असत्य होईल. कारण विशालकोन त्रिकोणाचे शिरोलंब (रेषाखंड) परस्परांना छेदत नाहीत (आ. 5·8 पाहा). पण त्यांच्या शिरोलंबरेषा मात्र निश्चितपणे छेदतात. या रेषा एका बिंदूत छेदतात हे आपण नुकतेच सिद्ध केले आहे. अशा तऱ्हेने काटकोन त्रिकोणाच्या शिरोलंबासंबंधी तुम्ही चर्चा करा.]



आ. 5·8

त्रिकोणाच्या शिरोलंबांच्या (रेषांच्या) संपातबिंदूला त्रिकोणाचा **शिरोलंबसंपात** अथवा **लंबकेंद्र** (orthocentre) म्हणतात.

§ 5·8 प्रश्न :

1. खाली दिलेल्या प्रत्येक विधानात रिकाम्या जागेसाठी तीन पर्याय दिले आहेत. त्यांपैकी योग्य पर्यायावर ✓ अशी खूण करा.
   (a) लघुकोन त्रिकोणाचा लंबकेंद्र ________ असतो.
   (i) त्रिकोणाच्या अंतर्भागात (ii) त्रिकोणाच्या बाह्यभागात (iii) त्रिकोणावर
   (b) ________ त्रिकोणाचा शिरोलंबसंपात त्रिकोणावर असतो.
   (i) लघुकोन (ii) विशालकोन (iii) काटकोन
   (c) लंबकेंद्र हा ________ चा छेदनबिंदू असतो.
   (i) रेषांचा (ii) रेषाखंडांचा (iii) किरणांचा
2. $\triangle ABC$ मधे बिंदू O हा लंबकेंद्र असल्यास सिद्ध करा की A बिंदू, $\triangle OBC$ चा शिरोलंबसंपात आहे.

   (**सूचना** : त्रिकोणाच्या दोन बाजू $\triangle OBC$ चे शिरोलंब होतात.)

§ 5·9 त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकांचा एकसंपात :

आपल्याला आता त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकांच्या एकसंपाताबद्दल माहिती पाहावयाची आहे. पण त्यांचा एकसंपात सिद्ध करण्यापूर्वी त्यांच्यासंबंधी एक महत्वाचा गुणधर्म आपल्याला प्रथम सिद्ध करावा लागणार आहे. हा गुणधर्म म्हणजे देखील एक प्रमेयच आहे. त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकांच्या एकसंपाताचा गुणधर्म सिद्ध करताना या प्रमेयाचा आपल्याला आधार घ्यावा लागणार असल्याने आपण त्याला **पूर्वप्रमेय** (Lemma) म्हणू.

■ **पूर्वप्रमेय : कोनदुभाजकांचे प्रमेय**

दिलेला कोनाचा अंत्यबिंदूविरहित कोनदुभाजक, त्या कोनाच्या बाजूंपासून समान अंतरावर असणाऱ्या, त्या कोनाच्या अंतर्भागातील सर्व बिंदूंचा संच होय.

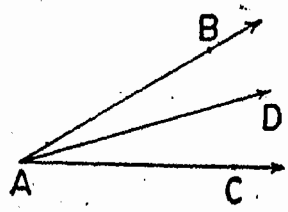
पूर्वप्रमेयाचे हे विधान सिद्ध करण्यासाठी आपल्याला दोन बाबी सिद्ध कराव्या लागतील.

(i) दिलेल्या कोनाच्या कोनदुभाजकावरील बिंदू (अंत्यबिंदू वगळून) त्या कोनाच्या अंतर्भागात असतो व कोनांच्या बाजूंपासून समदूर असतो.

(ii) दिलेल्या कोनाच्या अंतर्भागातील जो बिंदू कोनाच्या बाजूंपासून समदूर असेल तो प्रत्येक बिंदू त्या कोनाच्या कोनदुभाजकावर असतो.

पक्ष : $\angle BAC$ चा कोनदुभाजक किरण AD आहे (आ. 5·9).

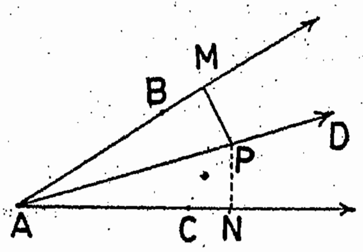
साध्य : (i) जर बिंदू P, किरण AD वरील कोणताही बिंदू असेल तर P हा, $\angle BAC$ च्या अंतर्भागात असतो आणि रेषा AB व रेषा AC पासून समान अंतरावर असतो.



आ. 5·9

(ii) बिंदू Q, $\angle BAC$ च्या अंतर्भागात असेल आणि रेषा AB व रेषा AC पासून समदूर असेल तर Q बिंदू $\angle BAC$ च्या कोनदुभाजकावर असतो.

सिद्धता (i) : P बिंदू, $\angle BAC$ च्या कोनदुभाजकावर आहे. कोनदुभाजकाच्या व्याख्येनुसार तो बिंदू, $\angle BAC$ च्या अंतर्भागात आहेच.



आ. 5·10

रेख $PM \perp$ रेषा AM व रेख $PN \perp$ रेषा AN टाका.

$\triangle PAM$ व $\triangle PAN$ एकरूप त्रिकोण आहेत. तुम्ही ते सहज सिद्ध करू शकाल.

$\therefore$ बाजू $PM \cong$ बाजू PN.

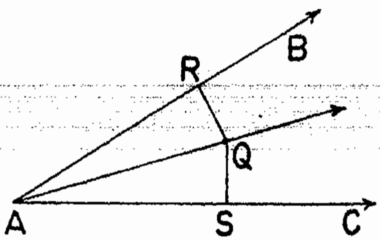
$\therefore l(PM) = l(PN)$

$\therefore$ P हा, रेषा AM व रेषा AN पासून समदूर आहे.

(ii) : आता Q बिंदू, $\angle BAC$ च्या अंतर्भागात असून रेषा AB व रेषा AC पासून समदूर आहे, हे दिलेले आहे (आ. 5·11).

$Q \neq A$ आणि Q हा, $\angle BAC$ च्या कोनदुभाजकावर आहे, हे सिद्ध करायचे आहे.

Q बिंदू, $\angle BAC$ च्या अंतर्भागात असल्याने कोनाच्या अंतर्भागाच्या व्याख्येनुसार Q व A एकच असणे शक्य नाही.



आ. 5·11

$\therefore Q \neq A$

Q बिंदू, रेषा AB व रेषा AC पासून समदूर आहे.

$\therefore l(QR) = l(QS)$

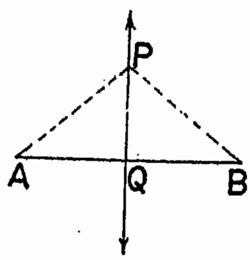
आता, $\triangle ARQ$ व $\triangle ASQ$ एकरूप दाखवता येतात.

$\angle RAQ \cong \angle SAQ$

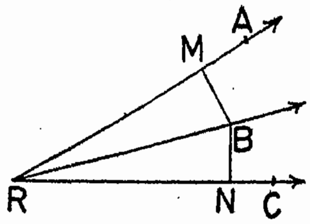
$\therefore$ किरण AQ हा, $\angle BAC$ चा कोनदुभाजक आहे.

[टीप : रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू, रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असतो, तर कोनदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू कोनाच्या बाजूंपासून समदूर असतो, हे लक्षात घेण्यासारखे आहे.]

रेषा PQ, रेख AB ची लंबदुभाजक असेल तर, $l(AP) = l(BP)$ असते (आ. 5·12).



आ. 5·12



आ. 5·13

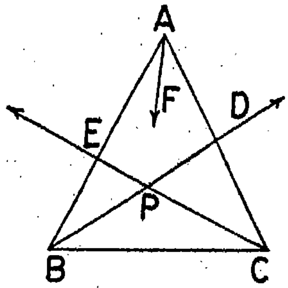
$\angle ARC$ चा कोनदुभाजक किरण RB असेल व रेख $BM \perp$ रेषा RA आणि रेख $BN \perp$ रेषा RC असेल (आ 5·13). तर, $l(BM) = l(BN)$ असते.]

§ 5·10 आता या पूवप्रमेयाचा उपयोग करून कोनदुभाजकांच्या एकसंपाताचे प्रमेय सिद्ध करू.

■ **प्रमेय : कोनदुभाजकांचा एकसंपात**

त्रिकोणाच्या कोनांचे कोनदुभाजक एकसंपाती असतात.

सिद्धता : किरण AF, किरण BD व किरण CE हे अनुक्रमे $\angle A$, $\angle B$ व $\angle C$ चे कोनदुभाजक आहेत असे समजा. कोनदुभाजक परस्परांना समांतर असणे शक्य नाही. समजा, किरण CE व किरण BD परस्परांस P बिंदूत छेदतात. म्हणजेच P बिंदू, किरण CE व किरण BD यांना समाईक आहे. हाच बिंदू, किरण AF वर आहे हे सिद्ध केले की आपले प्रमेय सिद्ध झाले.



आ. 5·14

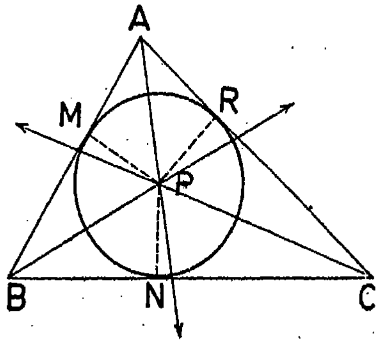
1. P बिंदू, किरण BD या कोनदुभाजकावर आहे. म्हणून कोनदुभाजकाच्या प्रमेयानुसार तो, रेषा BC व रेषा AB पासून समदूर आहे.
2. तसेच, बिंदू P, किरण CE या कोनदुभाजकावर आहे. म्हणून तो, रेषा BC व रेषा AC पासून समदूर आहे.
3. विधान 1 व 2 वरून असे सांगता येईल की P बिंदू, रेषा AB व रेषा AC पासून समदूर आहे.
4. म्हणून कोनदुभाजकाच्या प्रमेयानुसार P बिंदू, $\angle BAC$ च्या कोनदुभाजकावर आहे. म्हणजे P, किरण AF वर आहे.
5. यावरून हे तीनही कोनदुभाजक एकसंपाती आहेत हे सिद्ध झाले.

[टीप : वरील सिद्धतेत P बिंदू, $\angle A$ च्या अंतर्भागात आहे हे कसे दाखवाल ?]

§ 5·11 या ठिकाणी हे स्पष्ट होते की त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकांचा संपातबिंदू, त्या त्रिकोणाच्या बाजू सामावणाऱ्या रेषांपासून समदूर असतो. त्यामुळे या बिंदूपासून त्रिकोणाच्या बाजूंवर टाकलेल्या लंबाच्या लांबी समान राहतील.

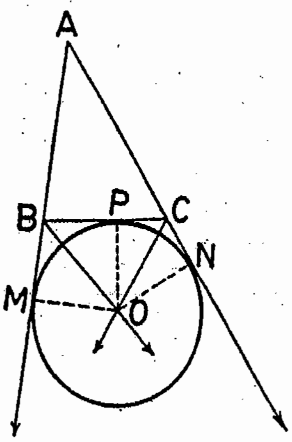
$\therefore$ आ. 5·15 मधे, $l(PM) = l(PN) = l(PR)$.

$\therefore$ वर्तुळाच्या व्याख्येनुसार M, N आणि R हे तीनही बिंदू एका वर्तुळावर आहेत. या वर्तुळाचा केंद्र P राहील व त्रिज्या $l(PR)$, $l(PM)$ किंवा $l(PN)$ एवढी राहील. त्रिकोणाच्या बाजू AB वरील M बिंदू हाच फक्त त्या वर्तुळावर आहे, कारण बाजू AB, रेख PM ला M मधे लंब आहे. म्हणून बाजू AB वर्तुळाला M मधे स्पर्श करते. तसेच, बाजू AC व बाजू BC ह्यासुद्धा वर्तुळाला अनुक्रमे R व N मधे स्पर्श करतात. त्रिकोणाच्या तीनही बाजूंना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळाला त्या त्रिकोणाचे **आंतरस्पर्शी वर्तुळ** अथवा **आंतरवर्तुळ** (Incircle of a Triangle or Inscribed Circle of a Triangle) म्हणतात. या वर्तुळाच्या केंद्राला (येथे, बिंदू P) **कोनदुभाजक संपाताला आंतरकेंद्र** (Incentre) म्हणतात.



आ. 5·15

[टीप : आ. 5·16 पाहा. किरण BO व किरण CO, △ABC च्या, अनुक्रमे ∠CBM व ∠BCN ह्या बाह्यकोनांचे कोनदुभाजक आहेत. त्यांचा छेदनबिंदू O आहे. कोनदुभाजकाच्या प्रमेयावरून, O बिंदू, △ABC च्या बाजू सामावणाऱ्या रेषांपासून समदूर आहे.



आ. 5·16

जर रेख OP, रेख OM व रेख ON हे अनुक्रमे रेषा BC, रेषा AB व रेषा AC ह्या रेषांवर O पासून लंब असतील तर, $l(OP) = l(OM) = l(ON)$.

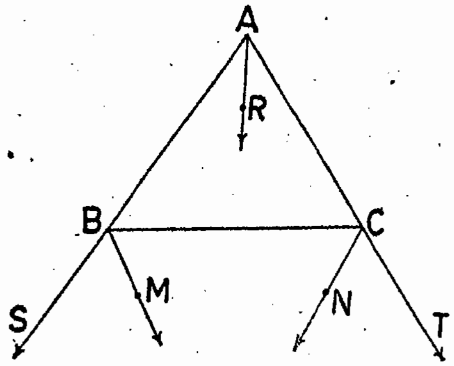
वर्तुळाच्या व्याख्येनुसार P, M व N हे बिंदू एका वर्तुळावर आहेत. त्या वर्तुळाचा केंद्र O असून त्रिज्या $l(OP)$, $l(OM)$ किंवा $l(ON)$ एवढी असेल. हे वर्तुळ △ABC च्या बाजू सामावणाऱ्या रेषांना स्पर्श करते आणि पूर्णपणे △ABC च्या बाह्यभागांत असते (फक्त P बिंदू वगळून). अशा वर्तुळाला **बाह्यवर्तुळ** (Escribed Circle or Ex-circle) म्हणतात. या वर्तुळाच्या केंद्राला (येथे बिंदू O) **बाह्यकेंद्र** (Ex-centre) म्हणतात.

प्रत्येक त्रिकोणाला अशा प्रकारची तीन बाह्यवर्तुळे असतात हे उघड आहे.]

§ 5·12 प्रश्न :

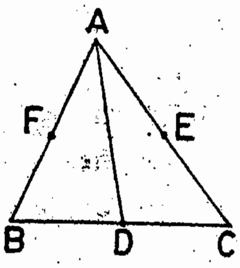
1. दिलेल्या कोनाच्या दोन भुजांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूंचा संच कोणता ?
2. छेदणाऱ्या दोन रेषांपासून समदूर असलेले व छेदनबिंदूपासून 3 सेमी अंतरावर असलेले किती बिंदू स्थापता येतील ?
3. रेषा L व रेषा M या दोन रेषांना एक वर्तुळ अनुक्रमे A व B बिंदूत स्पर्श करते. वर्तुळाचा केंद्र O आहे. तर खालील प्रश्नांची कारणासहित उत्तरे दया
   (a) रेषा OA व रेषा OB अनुक्रमे रेषा L व रेषा N यांना लंब आहेत का ?
   (b) O बिंदू, रेषा L व रेषा M पासून समदूर आहे का ?
   (c) रेषा L व रेषा M यांना स्पर्श करणारे, दिलेले वर्तुळ हे एकच वर्तुळ आहे का ?
   (d) या दोन रेषांपासून समदूर असलेला, त्यांच्याच प्रतलात, Q बिंदू आहे. तर Q आणि O हे बिंदू एकच आहेत का ?
   (e) या दोन रेषांना स्पर्श करणारे व Q बिंदू हा केंद्र असणारे वर्तुळ असू शकेल का ?
4. **पक्ष** : आकृती 5·17 मधे किरण BM व किरण CN, △ABC च्या, अनुक्रमे ∠B व ∠C च्या बाह्यकोनांचे कोनदुभाजक आहेत. किरण AR, ∠A चा कोन दुभाजक आहे.

   साध्य : (i) किरण AR, किरण BM व किरण CN एकसंपाती आहेत.
   (ii) यांचा संपातबिंदू, △ABC च्या कोणत्या कोनाच्या अंतर्भागात असेल ते शोधा.



आ. 5·17

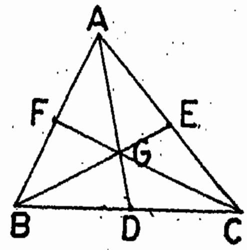
§ 5·13 त्रिकोणाची मध्यगा :



आ. 5·18

त्रिकोणाचा शिरोबिंदू व त्याच्यासमोरील बाजूचा मध्यबिंदू यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडास त्रिकोणाची **मध्यगा** (Median) म्हणतात.

आ. 5·18 मधे △ABC ची रेख AD मध्यगा आहे. त्रिकोणाला अशा किती मध्यगा असू शकतात ? बिंदू E व F, अनुक्रमे बाजू AC व बाजू AB चे मध्यबिंदू असतील तर △ABC च्या इतर मध्यगा कोणत्या ? तुमच्या वहीवर कोणताही एक त्रिकोण काढून त्याच्या तीन मध्यगा काढा. आकृती जर काळजीपूर्वक काढली असेल तर ह्या मध्यगा एकाच बिंदूत छेदतात असे दिसेल.



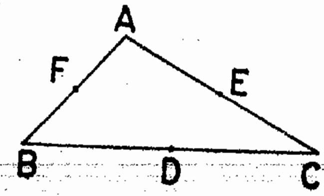
आ. 5·19

हीच गोष्ट आ. 5·19 मधे दाखवली आहे. ह्या मध्यगांचा संपातबिंदू G आहे. d(A, G) व d(G, D) मोजा. या दोन अंतरांमधे कोणता संबंध तुम्हांला दिसतो ?

वर केलेल्या निरीक्षणाचे समर्थन करणारे एक प्रमेय पुढे सांगितले आहे.

§ 5·14 ▪ प्रमेय : मध्यगांचा एकसंपात

प्रत्येक त्रिकोणाच्या मध्यगा एकसंपाती असतात.

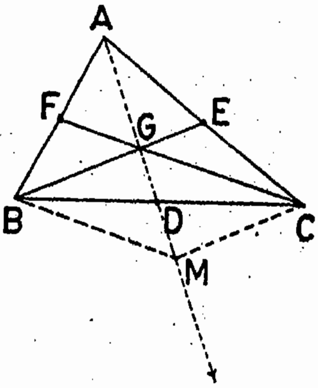


आ. 5·20

पक्ष : समजा △ABC च्या बाजूंचे D, E, F हे मध्यबिंदू आहेत (आ. 5·20).

साध्य : मध्यगा, रेख AD, रेख BE व रेख CF एकसंपाती आहेत.

सिद्धता : संपूर्ण सिद्धता देण्याऐवजी, ज्या क्रमाने सिद्धतेच्या पायऱ्या लिहायच्या आहेत, त्या क्रमाने प्रश्न विचारले आहेत. त्या प्रश्नांची उत्तरे देऊन सिद्धता पूर्ण करा.



आ. 5·21

1. मध्यगा BE व मध्यगा CF, G मधे छेदतात असे समजा. (आ. 5·21). या मध्यगा परस्परांना छेदतीलच असे आपण कशाच्या आधारावर सांगू शकतो ?
2. तिसरी मध्यगादेखील G मधून जाते हे आपणास सिद्ध करायचे आहे. यासाठी, किरण AG, रेख BC ला D मधे छेदतो हे दाखवावे लागेल किंवा किरण AG, रेख BC ला P मधे छेदतो असे समजल्यास P व D बिंदू एकच आहेत हे दाखवले की झाले. त्यासाठी l(BP) व l(CP) मधे कोणता संबंध दाखवावा लागेल ?
3. किरण AG वर M बिंदू असा घ्या की d(A, G) = d(G, M). रेख BM व रेख CM काढा.
4. बिंदू G व F हे, △ABM च्या कोणत्या दोन बाजूंचे मध्यबिंदू आहेत ?
5. त्रिकोणाच्या बाजूंच्या मध्यबिंदूंच्या प्रमेयावरून रेख FG व रेख BM यांच्यात कोणता संबंध दाखवता येतो ?
6. त्यामुळे रेख GC व रेख BM यांच्यात कोणता संबंध सांगता येतो ?
7. □GCMB समांतरभुज चौकोन आहे हे कसे दाखवाल ?

8. समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णांच्या अनेक गुणधर्मांपैकी इथे कोणता गुणधर्म उपयुक्त ठरेल ?

9. त्यावरून P बिंदूच्या रेख BC वरील स्थानाबद्दल काय सांगता येईल ?

10. यावरून काय निष्कर्ष काढाल ?

या प्रमेयाची सिद्धता आपण कशी दिली ? त्रिकोणाच्या दोन मध्यगा ज्या बिंदूत छेदतात त्या बिंदूतून जाणारा, तिसऱ्या शिरोबिंदूपासून त्याच्या समोरील बाजूपर्यंत काढलेला रेषाखंड, त्या बाजूची मध्यगा असतो, हे आपण सिद्ध केले. म्हणजे G बिंदू, तीनही मध्यगांना समाईक आहे. मध्यगांच्या या संपात-बिंदूला **गुरुत्वमध्य** (Centroid) **अथवा मध्यगा संपात** म्हणतात.

§ 5·15 ■ प्रमेय :

त्रिकोणाच्या गुरुत्वमध्याचे शिरोबिंदूपासूनचे अंतर, त्या शिरोबिंदूपासून समोरील बाजूवर काढलेल्या मध्यगेच्या लांबीच्या दोनतृतीयांश असते.

सिद्धता : मध्यगांच्या एकसंपाताच्या प्रमेयाची आ. 5·21 पाहा.

समजा $l(GD)=x$.

बिंदू D, रेख GM चा मध्यबिंदू असल्याने $l(GM)=2x$.

रचनेनुसार बिंदू G, रेख AM चा मध्यबिंदू आहे.

$\therefore l(AG)=2x$

$\therefore l(AD)=x+2x=3x$

$\therefore \dfrac{l(AG)}{l(AD)}=\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore l(AG)=\frac{2}{3}\times l(AD)$

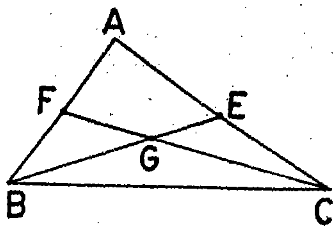
तसेच, $l(CG)=\frac{2}{3}\times l(CF)$ व

$l(BG)=\frac{2}{3}\times l(BE)$ सिद्ध करता येईल.

§ 5·16 प्रश्न :

1. 5·22 मध्ये △ABC च्या बाजू AC व बाजू AB यांचे अनुक्रमे E व F हे मध्यबिंदू आहेत. यावरून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

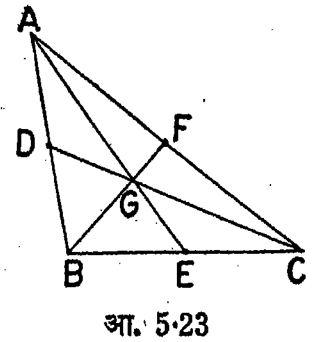
(a) रेख CF व रेख BE, त्रिकोणाच्या अनुक्रमे कोणत्या बाजूंना मध्यगा आहेत ? (b) तिसऱ्या बाजूच्या मध्यगेवर आकृतीतील कोणते दोन बिंदू आहेत ? (c) रेख FE, कोणत्या त्रिकोणांची मध्यगा होईल ? (d) त्रिकोणाच्या मध्यगांचा संपातबिंदू त्रिकोणाच्या अंतर्भागात आहे की बाह्यभागात ?



आ. 5·22

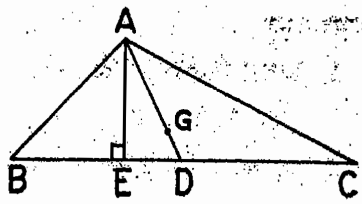
2. आ. 5·23 मधे, रेख AE, रेख BF व रेख CD ह्या मध्यगा असून त्यांचा संपातबिंदू G आहे.

(a) $l(AE)=12$ असेल तर $l(AG)$ काढा. (b) $l(CG)=5$ असेल तर $l(CD)$ काढा. (c) $l(GE)=2x$ असेल तर $l(BF)$ काढा. (d) जर रेख AF ⊥ रेख AB, $l(AC)=6$ आणि $l(AB)=4$ असेल तर $l(GF)$ काढा.



आ. 5·23

3. आ. 5·24 मधे बिंदू G, $\triangle ABC$ चा गुरुत्वमध्य असून रेख AD, एक मध्यगा आहे. रेख AE हा शिरोलंब आहे.
जर $l(GD)=4$, $l(ED)=6$ असेल
तर $l(AE)=$?



आ. 5·24

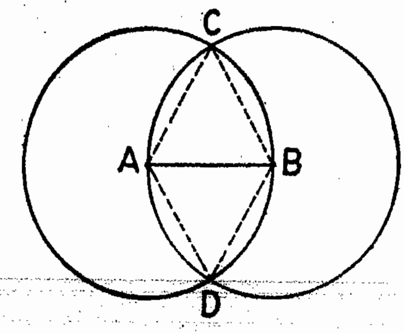
§ 5·17 दोन वर्तुळांचे प्रमेय :

आठव्या इयत्तेत तुम्ही भूमितीमधील काही रचना केल्या. या वर्षी आपल्याला आणखी काही भौमितिक रचना शिकायच्या आहेत. त्यासाठी आपल्याला एका महत्त्वाच्या प्रमेयाची आवश्यकता भासणार आहे. त्या प्रमेयाकडे वळण्यापूर्वी प्रथम, खाली दिलेली एक सोपी रचना पाहा.

दिलेल्या पायावर समभुज त्रिकोण काढणे.

रचना :

1. समजा दिलेल्या रेषाखंडाची लांबी a आहे. a लांबीचा रेख AB काढा.
2. बिंदू A केंद्र घेऊन a त्रिज्येने एक वर्तुळ काढा.
3. तसेच B केंद्र घेऊन a त्रिज्येने दुसरे वर्तुळ काढा. समजा ही वर्तुळे C व D मधे छेदतात. C व D बिंदू, रेषा AB च्या विरुद्ध बाजूस आहेत.
4. रेख AC, रेख BC, रेख AD व रेख BD काढा. $\triangle ACB$ व $\triangle ADB$ हे इष्ट समभुज त्रिकोण आहेत.



आ. 5·25

वरील सर्व रचनेत, काढलेली दोन वर्तुळे परस्परांना छेदतात, हे आपण अभावितपणे गृहीत धरले. काढलेली आकृतीदेखील त्याचे समर्थन करते असे दिसते. परंतु आपल्याजवळ असलेली गृहीतके व आपण आतापर्यंत सिद्ध केलेली प्रमेये, ही दोन वर्तुळे छेदतीलच, अशी ग्वाही देत नाहीत, मग ही वर्तुळे परस्परांना केव्हा छेदतील? कोणत्या परिस्थितीत ती छेदू शकणार नाहीत? या प्रश्नांचे निर्णायक उत्तर जोपर्यंत आपल्याला मिळत नाही तोपर्यंत वर सांगितलेल्या रचनेतील समभुज त्रिकोण मिळण्याच्या शक्यतेबद्दल आपण निश्चित काहीच सांगू शकणार नाही.

कोणत्या परिस्थितीत, दिलेली दोन वर्तुळे परस्परांना छेदतात हे खालील प्रमेयात सांगितले आहे.

■ **प्रमेय : दोन वर्तुळांचे प्रमेय**

समजा दोन वर्तुळांच्या केंद्रांतील अंतर c आहे व त्यांच्या त्रिज्या अनुक्रमे a आणि b आहेत. जर a, b आणि c यांपैकी प्रत्येक, इतर दोघांच्या बेरजेपेक्षा लहान असेल तर ती दोन वर्तुळे परस्परांना दोन भिन्न बिंदूंत छेदतात आणि त्यांचे दोन छेदनबिंदू, त्यांच्या केंद्रांतून जाणाऱ्या रेषेच्या विरुद्ध अंगास असतात.

या प्रमेयाची सिद्धता किचकट असल्याने येथे गाळली आहे. तरीपण पुढे भौमितिक रचना करताना या प्रमेयाचा आपल्याला उपयोग करावा लागणार असल्याने, हे प्रमेय आपण मान्य करू.

स्वाध्याय :

1. खाली दिलेल्या अटी पूर्ण करणारे प्रतलातील बिंदूसंच सांगा

   (i) दिलेल्या बिंदूपासून 2 सेमी अंतरापेक्षा कमी अंतरावर असलेल्या बिंदूंचा संच. (ii) छेद-णाऱ्या दोन रेषांपासून समदूर असलेला बिंदू. (iii) दिलेल्या बिंदूपासून 1 सेमी अंतरावरील बिंदू. (iv) 2 मापे अंतरावरील दोन बिंदूंपासून समदूर असणारा बिंदू. (v) त्रिकोणाच्या बाजूपासून समदूर असणारा बिंदू (vi) दिलेला रेषाखंड हा, कर्ण होईल अशा काटकोन त्रिकोणाचा शिरोबिंदू. (vii) दिलेल्या कोनांच्या बाजूंना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळाचा केंद्रबिंदू. (viii) दिलेल्या रेषेला दिलेल्या बिंदूत स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळाचा केंद्रबिंदू. (ix) दिलेले दोन बिंदू सामावणाऱ्या वर्तुळांचा केंद्रबिंदू. (x) तीन नैकरेषीय बिंदूंपासून समदूर असलेला बिंदू.

2. A रकान्यात त्रिकोणाशी संबंधित अशा रेषा दिल्या असून, B रकान्यात रेषांच्या छेदनबिंदूंची नावे दिली आहेत. रेषा व त्यांच्या छेदनाशी संबंधित बिंदू अशा जोड्या लावा.

A	B
1. मध्यगा	(i) लंबकेंद्र
2. कोनदुभाजक	(ii) गुरुत्वमध्य
3. बाजूंचे लंबदुभाजक	(iii) आंतरकेंद्र
4. शिरोलंब	(iv) परिकेंद्र
	(v) शिरोबिंदू
	(vi) बाह्यकेंद्र

3. P केंद्र असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या p आहे व Q केंद्र असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या q आहे. जर $p+q>l(PQ)$ असेल तर ही वर्तुळे परस्परांना छेदतील का ? कारण सांगा.

4. □ABCD हा समांतरभुज चौकोन असून त्याच्या प्रतलात असलेला M बिंदू त्याच्या शिरोबिंदू-पासून समदूर आहे. सिद्ध करा की □ABCD हा काटकोन चौकोन आहे.

5. □PQRS ह्या समलंब चौकोनात रेख PQ ∥ रेख RS. या चौकोनाच्या प्रतलात P, Q R, व S पासून समदूर असलेला बिंदू असण्यासाठी चौकोनाच्या बाबतीत कोणती बाब आवश्यक आहे ?

6. खालील प्रश्नांची उत्तरे दया.

   (i) कोणत्या परिस्थितीत त्रिकोणाच्या मध्यगांचे, शिरोलंबांचे व कोनदुभाजकांचे संपातबिंदू एकच होतील ? (ii) त्रिकोणाचा एक शिरोबिंदू कोणत्या परिस्थितीत शिरोलंबांचा संपातबिंदू होईल ? (iii) त्रिकोणाच्या आंतरवर्तुळाचा केंद्रबिंदू व परिवर्तुळाचा केंद्रबिंदू हे कोणत्या परिस्थितीत एकच होतील ? (iv) △ABC च्या ∠B च्या बाजूपासून समदूर असलेल्या व B पासून 4 अंतरावर असलेल्या बिंदूंचा संच कोणता ? (v) कोणत्या परिस्थितीत त्रिकोणाचा एक शिरोलंब हा त्या त्रिकोणाची एक बाजू असेल ? (vi) कोणत्या परिस्थितीत त्रिकोणाचा एक शिरोलंब, त्या त्रिकोणाची एक मध्यगाही होईल ? (vii) ∠BAC च्या बाजूंपासून समदूर असलेल्या व त्याच्या अंतर्भागात असलेल्या बिंदूंचा संच कोणता ? (viii) कोणत्या प्रकारच्या त्रिकोणात लंबकेंद्र व परिकेंद्र एकच असतील ?

7. △ABC दिला आहे. H हा त्याचा लंबकेंद्र आहे. सिद्ध करा की, A, B व C हे अनुक्रमे △HBC, △HCA व △HAB यांचे लंबकेंद्र आहेत.

8. S हा लघुकोन $\triangle ABC$ चा परिकेंद्र आहे. सिद्ध करा की, $m\angle BSC = 2m\angle A$.

9. $\triangle ABC$ चे आंतरकेंद्र I असेल तर खालील बाबी सिद्ध करा.

(i) $m\angle AIB = 90 + \frac{1}{2}m\angle C$

(ii) $m\angle AIC = 90 + \frac{1}{2}m\angle B$

(iii) $m\angle BIC = 90 + \frac{1}{2}m\angle A$

(सूचना $\frac{1}{2}m\angle A + \frac{1}{2}m\angle B + m\angle AIB = 180$ व $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$)

10. त्रिकोणाच्या तीन मध्यगांच्या लांबी समान असतील तर तो समभुज त्रिकोण असतो हे सिद्ध करा.

प्रकरण 6 : गोल

मागील काही प्रकरणांत वर्तुळाच्या गुणधर्मांचा अभ्यास केला. या प्रकरणात आपण गोलाच्या गुणधर्मांचा अभ्यास करणार आहोत.

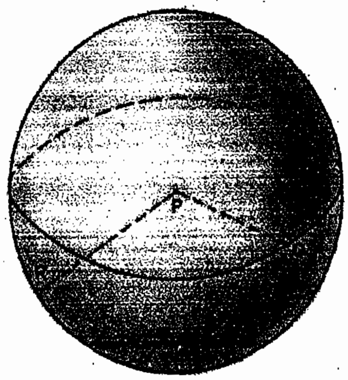
§ 6·1 गोल आणि वर्तुळ यांच्या काही गुणधर्मांत बरेचसे साम्य आहे. वर्तुळ म्हणजे एका प्रतलातील बिंदूंचा संच आहे तर गोल हा अवकाशातील बिंदूंचा संच आहे.

व्याख्या : गोल

दिलेल्या एका बिंदूपासून दिलेल्या अंतरावर असणाऱ्या अवकाशातील सर्व बिंदूंच्या संचास **गोल** असे म्हणतात.

त्या दिलेल्या बिंदूस गोलाचे **केंद्र** आणि दिलेल्या अंतरास गोलाची **त्रिज्या** म्हणतात.

[टीप : गोल या शब्दाने पृष्ठभागावरील बिंदू तेवढेच निर्देशित होतात. त्याच्या आतल्या भागातील बिंदूंचा समावेश होत नाही.]



आ. 6·1

समजा अवकाशातील P हा दिलेला बिंदू आहे आणि r कोणतीही धन संख्या आहे. तर P बिंदूपासून r अंतरावरील अवकाशातील सर्व बिंदूंचा संच म्हणजे गोल होय. P हा गोलाचा केंद्र आणि r ही गोलाची त्रिज्या होय.

(आ. 6·1 मध्ये) गोलावरील R, Q असे सर्व बिंदू, P पासून समान अंतरावर असल्यामुळे, सर्व त्रिज्या समान लांबीच्या असतील. म्हणजेच, $l(PQ) = l(PR) = r$ म्हणून रेख PQ आणि रेख PR या त्रिज्या आहेत. आपणास माहीत आहे की, 'वर्तुळाची त्रिज्या' हा शब्द पुढील दोन भिन्न अर्थाने वापरला जातो : (i) अंतरदर्शक वास्तव संख्या म्हणून, आणि (ii) वर्तुळकेंद्र आणि वर्तुळावरील बिंदूस सांधणारे रेषाखंड म्हणून.

'गोलाची त्रिज्या' हे शब्ददेखील दोन भिन्न अर्थाने वापरले जातात. (i) अंतरदर्शक वास्तवसंख्या म्हणून, आणि (ii) गोलाचा केंद्र आणि गोलावरील बिंदू सांधणारे रेषाखंड म्हणून.

'गोलाची त्रिज्या' या शब्दांच्या दोन भिन्न अर्थापैकी कोणत्या वेळी कोणता अर्थ घ्यावा हे संदर्भावरून कळते.

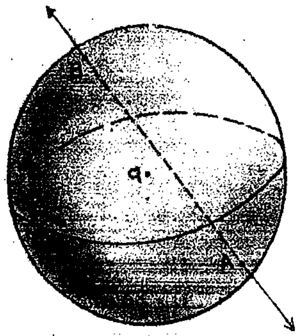
ज्या रेषाखंडाचा एक अंत्यबिंदू गोलाचा केंद्र आणि दुसरा अंत्यबिंदू गोलावरील बिंदू असतो, त्या रेषाखंडाला गोलाची त्रिज्या म्हणतात. त्रिज्येच्या गोलावरील अंत्यबिंदूस **त्रिज्येचे बाह्यटोक** म्हणतात. आ. 6·1 मध्ये दाखवलेल्या त्रिज्या, रेख PQ चे बाह्यटोक Q असून त्रिज्या रेख PR चे बाह्यटोक R आहे.

आकृतीमधे, रेख PQ ही त्रिज्या, रेख PR ह्या त्रिज्येपेक्षा लहान असावी असे वाटते, परंतु त्रिमिती वस्तूंच्या आकृती कागदाच्या प्रतलावर काढल्यामुळे असा भास निर्माण होतो. प्रत्यक्ष प्रतिकृती पाहिल्यास त्या दोन्ही त्रिज्या सारख्याच लांबीच्या आहेत, हे लक्षात येईल.

§ 6·2 छेदिका, जीवा आणि व्यास :

आपणास माहीत आहे की, जर वर्तुळाच्या प्रतलातील एखादी रेषा वर्तुळाच्या अंतर्भागास छेदत असेल तर त्याच्या छेदसंचात केवळ दोन बिंदू असतात. तसेच जर गोलास एखादी रेषा छेदत असेल तर मिळणाऱ्या छेदसंचात दोन बिंदू असतात. यासाठी आपणास गोलाची प्रतिकृती घेऊन पाहता येईल. एक गोल (प्लास्टिक चेंडू) घेऊन त्यातून एक सरळ तार घातली तर ती गोलास दोन बिंदूत छेदील.

आ. 6·2 मध्ये रेषा AB ही गोलास A आणि B या दोन बिंदूत छेदते.



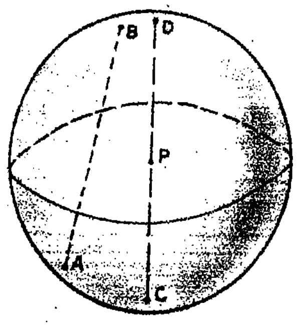
आ. 6·2

व्याख्या : गोलाची छेदिका

जर एखादी रेषा गोलास दोन भिन्न बिंदूत छेदत असेल तर त्या रेषेस गोलाची **छेदिका** असे म्हणतात.

गोलावरील दोन भिन्न बिंदू जोडल्यास एक रेषाखंड मिळेल. गोलावरील बिंदू हे या रेषाखंडाचे अंत्यबिंदू असतील. अशा रेषाखंडाला गोलाची जीवा म्हणतात. [वर्तुळाच्या जीवेची व्याख्या आठवा.]

व्याख्या : गोलाची जीवा



आ. 6·3

ज्या रेषाखंडाचे दोन्ही अंत्यबिंदू गोलावर असतात, अशा रेषाखंडाला त्या गोलाची **जीवा** म्हणतात.

आ. 6·3 मधे रेख AB ही गोलाची जीवा आहे. रेख CD देखील गोलाची जीवा आहे. परंतु रेख CD गोलाच्या केंद्रातून जाते, म्हणून तिला गोलाचा व्यास म्हणतात.

व्याख्या : गोलाचा व्यास

दिलेल्या गोलाच्या केंद्रातून जाणाऱ्या जीवेस त्या गोलाचा व्यास म्हणतात.

ज्याप्रमाणे 'गोलाची त्रिज्या' हे शब्द दोन भिन्न अर्थाने वापरले जातात, त्याचप्रमाणे 'गोलाचा व्यास' हे शब्ददेखील दोन भिन्न अर्थाने वापरले जातात :

(i) अंतरदर्शकसंख्या म्हणून, आणि (ii) रेषाखंड म्हणून.

आ. 6·3 मधे रेख CD हा व्यास आहे. इथे व्यास हा शब्द रेषाखंड दाखवतो पण ज्यावेळी आपण एका गोलाचा व्यास 10 सेमी आहे असे विधान करतो, त्यावेळी आपल्याला रेषाखंडाची लांबी हा अर्थ अभिप्रेत असतो.

§ 6·3 गोलाचा अंतर्भाग आणि बाह्यभाग :

आपणास माहीत आहे की, वर्तुळामुळे प्रतलाचे तीन परस्पर विभिन्न असे भाग होतात. गोलामुळे देखील अवकाशाचे तीन परस्पर विभिन्न भाग होतात. : (i) गोलावरील बिंदूंचा संच, (ii) गोलाच्या बाहेरील बिंदूंचा संच, (iii) गोलाच्या आतील बिंदूंचा संच.

वरील संच (ii), हा गोलाचा बाह्यभाग आणि संच (iii), हा गोलाचा अंतर्भाग होय.

गोलाचा अंतर्भाग आणि बाह्यभाग यांच्या व्याख्या वर्तुळाचा अंतर्भाग आणि बाह्यभाग यांच्या व्याख्ये-सारख्याच आहेत.

व्याख्या : गोलाचा अंतर्भाग

अवकाशातील ज्या बिंदूंचे, गोलाच्या केंद्रापासूनचे अंतर त्रिज्येपेक्षा कमी असेल, अशा बिंदूंच्या संचास **गोलाचा अंतर्भाग** म्हणतात.

गोलाचा केंद्र, अर्थातच गोलाच्या अंतर्भागात असतो; गोलाची त्रिज्या, r, ही एक धन वास्तव संख्या आहे. कोणत्याही बिंदूचे स्वतःपासूनचे अंतर शून्य असते. म्हणून गोलाच्या केंद्राचे अंतर स्वतःपासून शून्य असते. शून्य ही संख्या कोणत्याही धन वास्तव संख्येपेक्षा लहान असते. म्हणून गोलाचे केंद्र हे त्याच्या अंतर्भागात असते.

व्याख्या : गोलाचा बाह्यभाग :

अवकाशातील ज्या बिंदूंचे, गोलाच्या केंद्रापासूनचे अंतर त्रिज्येपेक्षा अधिक असेल, अशा बिंदूंच्या संचास **गोलाचा बाह्यभाग** म्हणतात.

गोलावरील बिंदू हे गोलाच्या अंतर्भागात नसतात, तसेच गोलाच्या बाह्यभागातही नसतात. म्हणून अवकाशातील कोणताही बिंदू हा गोलाच्या अंतर्भागात असेल किंवा गोलाच्या बाह्यभागात असेल.

§ 6·4 प्रश्न :

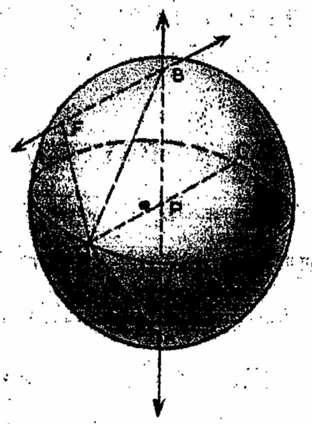
1. खालील विधाने 'सत्य' किंवा 'असत्य' हे सांगा.

   (i) गोलाच्या सर्व त्रिज्या एकरूप असतात. (ii) गोलाचा व्यास म्हणजे गोलाची जीवाच असते. (iii) गोलास फक्त दोन जीवा असतात. (iv) गोलाची त्रिज्या ही गोलाची जीवा असते. (v) गोलाच्या सर्व जीवा त्याचे व्यास असतात. (vi) दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या अंतरावरील सर्व बिंदूंच्या संचास गोल म्हणतात. (vii) गोलाची छेदिका, म्हणजे गोलास दोन बिंदूंत छेदणारे रेषाखंड होय. (viii) गोलाची जीवा, त्याच्या त्रिज्येपेक्षा नेहमी लहान असते. (ix) गोलाच्या जीवेचे अंत्यबिंदू गोलावर असतात. (x) गोलाचा केंद्र हा त्याच्या जीवेचा मध्यबिंदू असतो.

2. आ. 6·4 मधे गोलाचा केंद्र, P आहे आणि बिंदू A, B, C, F आणि Q हे गोलावर आहेत.

खालील रेषा आणि रेषाखंडांना गोलाची त्रिज्या, व्यास, जीवा, छेदिका यांपैकी योग्य नावे द्या.

(i) रेख PA (ii) रेख FB (iii) रेख CQ (iv) रेख BQ (v) रेख PQ (vi) रेख QF (vii) रेषा FB (viii) रेख CP (ix) रेख AB (x) रेषा AB.



आ. 6·4

3. खालील विधानातील रिक्त स्थानी योग्य शब्द घालून विधाने पूर्ण करा.

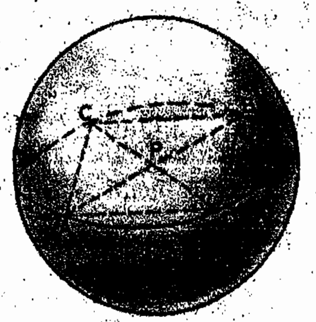
(i) गोलाची त्रिज्या ही त्याच्या व्यासाच्या ——— असते. [दुप्पट/निम्मी] (ii) गोलाच्या जीवेच्या अंत्यबिंदूशिवाय त्यावरील इतर बिंदू, गोलाच्या ——— असतात. [अंतर्भागात/वर/बाह्यभागात] (iii) गोलाच्या छेदिकेचे केवळ दोन बिंदू ——— असतात. [गोलाच्या अंतर्भागात/गोलावर/गोलाच्या बाह्यभागात] (iv) गोलाच्या अंतर्भागातील एक बिंदू, दोन भिन्न प्रतलांना समाईक आहे. या दोन प्रतलांचा छेद त्या गोलाची ——— आहे. [त्रिज्या/जीवा/छेदिका] (v) कोणत्याही गोलाच्या संदर्भात, त्याचा केंद्र एक ———, त्याची त्रिज्या, जीवा आणि व्यास हे ———, आणि त्याची छेदिका ——— असते. [प्रतल/रेषा/रेषाखंड/बिंदू]

4. एका गोलाचा केंद्र P आहे आणि त्याची त्रिज्या r आहे. Q हा कोणताही एक बिंदू आहे. तर Q ची स्थिती खालीलप्रमाणे दर्शवा.

I : Q, गोलाच्या अंतर्भागात आहे. E : Q, गोलाच्या बाह्यभागात आहे. S : Q, गोलावर आहे. N : याबद्दल काही सांगता येत नाही.

दिलेले	बिंदू Q ची स्थिती
(i) जर $r=\sqrt{3}$, $l(PQ)=2$	
(ii) जर $r=5$, $l(PQ)=2{\cdot}5$	
(iii) जर $r=100$, $l(PQ)=0$	
(iv) $r<l(PQ)$	
(v) $r=l(PQ)$	
(vi) $r>l(PQ)$	
(vii) एक त्रिज्या रेख PQ वर लंब आहे	
(viii) त्रिज्या $PM=l(PQ)$	
(ix) $r=2\,l(PQ)$	
(x) $r=\frac{1}{2}\,l(PQ)$	
(xi) $r\neq l(PQ)$	

5. आ. 6·5 मधे गोलाचा केंद्र P आहे. रेख AB आणि रेख CD गोलाचे व्यास आहेत. आता खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. (i) खालील रेषाखंडांपैकी कोणत्या जोड्या एकरूप दिलेल्या आहेत—रेख AB, रेख AC, रेख AP, रेख PB, रेख PD, रेख CP, रेख CD. (ii) ज्यांचे मध्यबिंदू P आहेत असे रेषाखंड कोणते? (iii) □ADBC चे कर्ण कोणते आहेत? (iv) गोलाची कोणती जीवा, रेख AB शी एकरूप आहे आणि रेख AB ला दुभागते? (v) वरील iii आणि iv वरून □ ADBC बाबतीत काय सांगता येईल? का? (vi) जर रेख AB आणि रेख CD एकमेकांस लंबरूप छेदत असतील तर □ADBC चे स्वरूप काय असेल? का?



आ. 6·5

§ 6·5 गोल आणि प्रतल यांचा छेद :

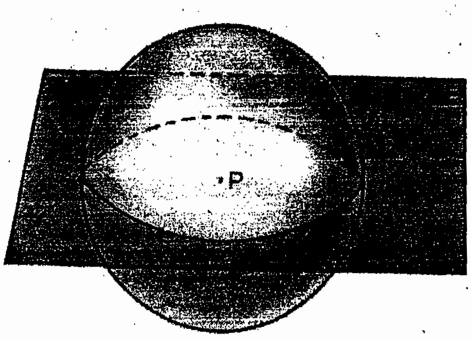
आपणास माहीत आहे की, 'जर दोन भिन्न रेषा एकमेकींना छेदत असतील तर त्यांचा छेद म्हणजे एक बिंदू असतो.' तसेच 'जर दोन भिन्न प्रतले एकमेकांना छेदत असतील तर त्यांचा छेद म्हणजे एक रेषा असते.' 'एक प्रतल आणि त्या बाहेरील बिंदूतून जाणारी रेषा प्रतलास छेदत असेल तर त्यांचा छेद म्हणजे एक बिंदू असतो.'

जर एखादी रेषा गोलास छेदत असेल तर छेदसंचात अधिकात अधिक दोन बिंदू असतात. आता कल्पना करा की, एखादया गोलास एक प्रतल छेदते, तर त्यांचा छेद काय असेल?

■ **प्रमेय : महावर्तुळ प्रमेय :**

एखादा गोल आणि त्याच्या केंद्रातून जाणारे एखादे प्रतल, यांचा छेद एक वर्तुळ असते. गोलाचे केंद्र हेच त्या वर्तुळाचे केंद्र असते आणि वर्तुळाची त्रिज्या गोलाच्या त्रिज्येएवढीच असते.

हे प्रमेय सिद्ध करण्यासाठी गोलाची व्याख्या आणि वर्तुळाची व्याख्या, या दोन्ही लक्षात घ्याव्या लागतील.



आ. 6·6

समजा P केंद्र असणारे एक गोल आहे आणि त्याची त्रिज्या r आहे. त्याच्या केंद्रातून जाणारे एक प्रतल E आहे. आपणास माहीत आहे की, एका दिलेल्या बिंदूपासून, दिलेल्या अंतरावरील, अवकाशातील सर्व बिंदूंचा संच गोल असतो. आणि एखादया प्रतलातील दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या अंतरावरील प्रतलातील सर्व बिंदूंचा संच वर्तुळ असते.

∴ प्रतल E आणि गोल यांच्या छेदसंचातील सर्व बिंदू E प्रतलात तर आहेतच पण ते गोलावरही असल्याने P पासून r अंतरावर आहेत. आणि P हा E मधे आहे. म्हणून छेदसंच म्हणजे, ज्याचे केंद्र P आणि त्रिज्या r आहे, असे वर्तुळ आहे.

व्याख्या : महावर्तुळ : ज्या गोलाच्या वर्तुळाचा केंद्र त्या गोलाचाच केंद्र असेल, आणि ज्याची त्रिज्या गोलाच्या त्रिज्येएवढी असेल, त्या वर्तुळास त्या गोलाचे **महावर्तुळ** (Great Circle) असे म्हणतात.

§ 6·6 आता आपण गोल आणि प्रतल यांचा छेद, या बाबतीतील महत्वाचा गुणधर्म पाहू.

वरील बाबतीत दोन पर्याय संभवतात : (i) प्रतल गोलाच्या केंद्रातून जात असेल. (ii) प्रतल गोलाच्या अंतर्भागातील एखादया बिंदूतून जात असेल.

जर प्रतल गोलास छेदून त्याच्या केंद्रातून जात असेल, तर महावर्तुळाच्या प्रमेयावरून, आपणास माहीत आहे की हा छेद म्हणजे एक वर्तुळ असते.

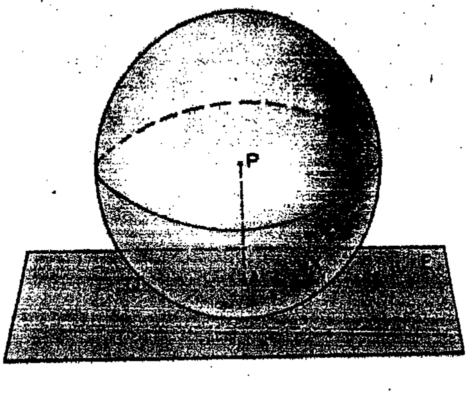
जर प्रतल गोलाच्या अंतर्भागातील एखादया बिंदूतून जात असेल तर त्यांचा छेद काय असेल ? आपला सामान्य अनुभव काय आहे ? या प्रश्नाचे उत्तर खालील प्रमेयावरून मिळेल :

■ **प्रमेय :**

एखाद्या गोलाच्या अंतर्भागास एखादे प्रतल छेदत असेल तर तो गोल व ते प्रतल यांचा छेद म्हणजे एक वर्तुळ असते.

प्रतलातील दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या निश्चित अंतरावर असलेल्या त्या प्रतलातील सर्व बिंदूंचा संच म्हणजे वर्तुळ असते अशी आपण वर्तुळाची व्याख्या केली आहे. गोलाच्या अंतर्भागास छेदणाऱ्या प्रतलाचा आणि गोलाचा छेद म्हणजे एक वर्तुळ असते हे दाखवण्याकरता आपल्याला पुढील दोन गोष्टी सिद्ध कराव्या लागतील. (i) असे प्रतल आणि गोल हे एकमेकांस छेदतात म्हणजेच त्यांच्या छेदसंचात एकतरी बिंदू असतो. आणि (ii) हा छेदसंच म्हणजे एक वर्तुळ असते.

हे प्रतल आणि गोल एकमेकांस छेदतात की नाही हे आपल्याला माहीत नाही. पण ते छेदत असतील तर त्यांच्या छेदनबिंदूंचे गुणधर्म काय असतील ? याचा आपण शोध घेऊ आणि मग असे गुणधर्म असलेले बिंदू मिळू शकतील काय हे आपण तपासून पाहू.



आ. 6·7

म्हणून तूर्त असे बिंदू असतात असे आपण मानू.

असा एक बिंदू Q घ्या (आ. 6·7 पाहा).

गोलाचे केंद्र P आणि त्रिज्या r माना. गोलाच्या अंतर्भागातील X हा एक बिंदू दिलेल्या प्रतल E वर राहतो असे समजा. म्हणून, $l(PX) < r$.

आता हे प्रतल, जर गोलाच्या केंद्र P मधून जात असेल तर प्रतल आणि गोल यांचा छेद म्हणजे एक वर्तुळ असते हे आपण पाहिलेच आहे. म्हणून हे प्रतल गोलाचे केंद्र P मधून जात नाही असे मानू. मग P पासून प्रतल E वर लंब टाकू. व त्याचा पाया A मानू.

मग रेख PA हा, प्रतल E वरील लंबरेषाखंड असल्यामुळे तो लघुतम असेल.

$\therefore\ l(PA) \leq l(PX)$ $\quad \therefore\ l(PA) < r$; $l(PA) = x$ मानले तर $x < r$.

शिवाय रेख PA ⊥ प्रतल E असल्याने आणि बिंदू Q हा प्रतल E मधे असल्याने, रेख PA ⊥ रेख AQ मिळेल. म्हणून $\triangle PAQ$ हा एक काटकोन त्रिकोण होईल (आ. 6·8 पाहा).

म्हणून जर $l(AQ)=y$ मानले तर पायथॅगोरसच्या प्रमेयानुसार

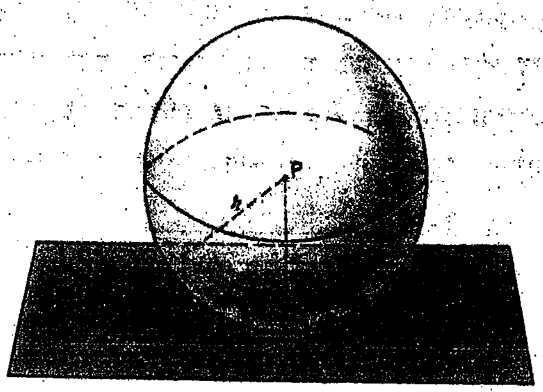
$$[l(AQ)]^2+[l(PA)]^2=[l(PQ)]^2$$

किंवा $y^2+x^2=r^2$

$$\therefore\ y^2=r^2-x^2$$

$$\therefore\ y=\sqrt{r^2-x^2}$$

r ही स्थिरसंख्या आहे. प्रतल E आणि गोलाचे केंद्र P हे निश्चित असल्याने A स्थिरबिंदू आहे. म्हणून $\sqrt{r^2-x^2}$ स्थिरसंख्या आहे म्हणून y स्थिर आहे.



आ. 6·8

ह्या सर्वांचा विचार केला तर Q बिंदूचे अपेक्षित गुणधर्म पुढीलप्रमाणे निघतात. : (i) बिंदू Q प्रतल E मध्ये आहे, (ii) $l(AQ)=y$ (स्थिर).

पण बिंदू A हाही प्रतल E मध्ये असल्याने Q बिंदूचे A ह्या प्रतल E मधील स्थिरबिंदूपासूनचे अंतर स्थिर आहे. हे अंतर $y=\sqrt{r^2-x^2}$ आहे. म्हणजेच जर प्रतल E आणि गोल परस्परांना छेदत असतीलच तर त्यांच्या छेदसंचातील Q सारखे बिंदू, A हे केंद्र आणि $\sqrt{r^2-x^2}$ ही त्रिज्या असलेल्या वर्तुळावर असले पाहिजेत. हाच Q चा अपेक्षित गुणधर्म होय.

हे लक्षात घेऊन आपण आता आपल्याला पाहिजे असलेल्या दोन्ही गोष्टी एकदम दाखवू शकू.

बिंदू A हे केंद्र आणि $\sqrt{r^2-x^2}$ ही त्रिज्या असलेले असे प्रतल E मधील वर्तुळ घेऊ. मग ह्यावरील प्रत्येक बिंदू गोलावर आहे असे दाखवले की आपले काम होईल.

या वर्तुळावरील R हा एक बिंदू घ्या. हे वर्तुळ प्रतल E मधे असल्याने बिंदू R, प्रतल E मधे आहेच तेव्हा तो गोलावर आहे दाखवू. त्याकरता त्याचे P पासूनचे अंतर r दाखवावे लागेल. $\triangle PAR$ काटकोन त्रिकोण आहे. म्हणून,

$$[l(PR)]^2=[l(PA)]^2+[l(AR)]^2$$
$$=x^2+[\sqrt{r^2-x^2}]^2$$
$$=x^2+(r^2-x^2)$$
$$=r^2$$

$$\therefore l(PR)=r.$$

यावरून दिलेले प्रतल E गोलाला छेदते एवढेच नव्हे तर गोल आणि प्रतल E यांच्या छेद-संचातील बिंदू वर्तुळावर असतात व प्रतल E मधील या वर्तुळावरील सर्व बिंदू गोलावर असतात. म्हणजेच प्रतल E व गोल यांचा छेद एक वर्तुळ असते हे सिद्ध झाले.

§ 6·7 ▪ प्रमेय :

गोलाच्या केंद्रापासून त्याच्या जीवेवर टाकलेला लंब, जीवेस दुभागतो.

आपणास माहीत आहे की, वर्तुळ–केंद्रापासून वर्तुळाचा व्यास नसलेल्या जीवेवर काढलेला लंबरेषाखंड, जीवेस दुभागतो. हा गुणधर्म कोणत्याही गोलाच्या कोणत्याही महावर्तुळासाठी सत्य आहे. पुन्हा, गोलाच्या महावर्तुळाचा केंद्र हा त्या गोलाचा केंद्रदेखील असतो. आता, गोलाची जीवा आणि गोलाचा केंद्र एक

प्रतल निश्चित करतात. (का ?). ज्या अर्थी हे प्रतल गोलाच्या केंद्रातून जाते, त्या अर्थी गोल आणि हे प्रतल यांच्या छेदामुळे महावर्तुळ मिळेल. गोलाची जीवा ही महावर्तुळाचीदेखील जीवा होते. म्हणून वर्तुळाच्या वरील प्रमेयानुसार, महावर्तुळाच्या केंद्रापासून त्याच्या जीवेवर टाकलेला लंबरेषाखंड जीवेस दुभागतो. म्हणून, गोलाच्या केंद्रापासून त्याच्या जीवेवर टाकलेला लंबरेषाखंड जीवेस दुभागतो.

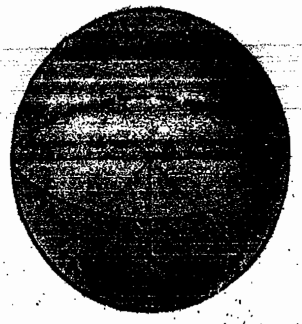
वरील प्रमेयाचा व्यत्यास 'गोलाचा केंद्र आणि त्याच्या जीवेचा मध्यबिंदू यांना सांधणारा, रेषाखंड जीवेस लंब असतो;' हादेखील सत्य आहे.

§ 6·8 प्रश्न :

1. खालील विधानांपैकी प्रत्येक विधान 'सत्य' किंवा 'असत्य' आहे ते सांगा : (a) गोलाच्या महावर्तुळाचा व्यास हा गोलाचा व्यास असतो. (b) गोलाच्या महावर्तुळाचा व्यास हा गोलाच्या व्यासाशी एकरूप असतो. (c) गोलाचा प्रत्येक व्यास हा एखादया महावर्तुळाचा व्यास असतो. (d) गोलाच्या कोणत्याही लघुवर्तुळाचा व्यास हा गोलाचा व्यास असतो. (e) महावर्तुळाच्या केंद्रापासून गोलाच्या कोणत्याही जीवेवर टाकलेला लंबरेषाखंड जीवेस दुभागतो. (f) गोलाचे केंद्र आणि त्याच्या जीवेच्या मध्यबिंदूस सांधणारा रेषाखंड जीवेस लंब असतो. (g) गोलाचे केंद्र आणि त्याच्या महावर्तुळाचे केंद्र एकच असते.

2. जर गोलास खालील संच छेदत असतील तर प्रत्येकवेळी छेदसंच काय असेल ? (i) गोलाच्या केंद्रातून जाणारी एक रेषा; (ii) गोलाच्या अंतर्भागातून जाणारी, पण त्याच्या केंद्रातून न जाणारी रेषा. (iii) गोलाच्या केंद्रातून जाणारे एकप्रतल. (iv) गोलाच्या अंतर्भागातून जाणारे पण त्याच्या केंद्रातून न जाणारे प्रतल. (v) गोलाच्या अंतर्भागातून जाणारी दोन समांतर प्रतले. (vi) जी एकमेकास लंबरूप असतील आणि प्रत्येकावर गोलाचा केंद्र असेल, अशी दोन प्रतले.

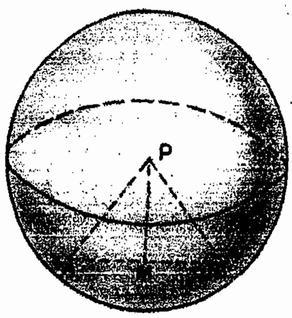
3. P केंद्र असणाऱ्या गोलाची जीवा रेख AB आहे. जर $l(AB)=12$ आणि त्रिज्या $r=8$, तर गोलाच्या केंद्रापासून जीवेचे अंतर किती ? (आ. 6·9 पाहा).



आ. 6·9

[सूचना : काटकोन त्रिकोण, △ABC मध्ये $[l(PC)]^2=[l(PB)]^2-[l(BC)]^2$

4. बाजूच्या आकृतीच्या साहाय्याने प्रश्न सोडवा.



आ. 6·10

(i) $l(AB)=48$, $r=25$, $l(PM)=?$

(ii) $l(PM)=6$, $r=10$, $l(AB)=?$

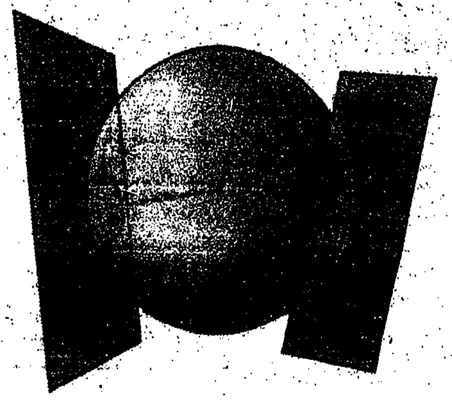
(iii) $l(AB)=14$, $r=25$, $l(PM)=?$

(iv) $r=30$, $l(PM)=18$, $l(AB)=?$

5. गोलाच्या केंद्रापासून समान अंतरावर असणाऱ्या व गोलाच्या अंतर्भागास छेदणाऱ्या प्रतलांमुळे बनणारी वर्तुळे एकरूप असतात. सिद्ध करा.

पक्ष : समजा P केंद्र असणाऱ्या गोलाच्या अंतर्भागात E आणि F ही दोन प्रतले समान अंतरावर छेदतात. समजा गोलाची त्रिज्या r आहे.

साध्य : गोल आणि E व F या दोन प्रतलांच्या छेदामुळे बनणारी दोन वर्तुळे एकरूप आहेत.



आ. 6·11

सिद्धता : समजा, गोलाचे केंद्र P पासून प्रतल E आणि F वर टाकलेल्या लंबांचे पाये अनुक्रमे A आणि B आहेत.

(i) $\therefore\ l(PA) = l(\text{—})$........(पक्ष)

(ii) गोल आणि प्रतल E च्या छेदामुळे येणाऱ्या वर्तुळाची त्रिज्या $= \sqrt{r^2 - [l(PA)]^2}$

(iii) गोल आणि प्रतल F यांचा छेद असणाऱ्या वर्तुळाची त्रिज्या $= \sqrt{\text{—}^2 - [l(\text{—})]^2}$

(iv) $\because\ l(PA) = l(\text{——}),\quad \therefore \sqrt{r^2 - [l(PA)]^2} = \sqrt{\quad\quad}$

(v) ∴ दोन्ही वर्तुळांच्या त्रिज्या —— आहेत.

(vi) ∴ ————

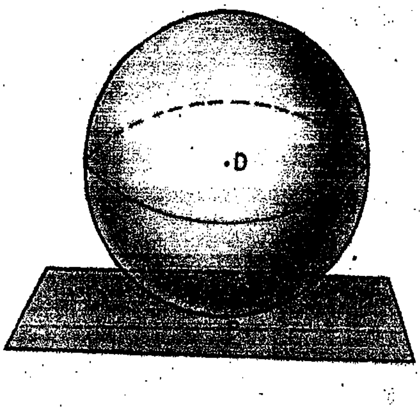
§ 6·9 स्पर्शप्रतल :

आपणास माहीत आहे की, गोल आणि त्यांच्या अंतर्भागात छेदणाऱ्या प्रतलाचा छेद म्हणजे वर्तुळ असते. म्हणजेच, गोलाच्या अंतर्भागातील एक जरी बिंदू, छेदणाऱ्या प्रतलावर असेल तर छेद म्हणजे वर्तुळ असते.

गोलास छेदणाऱ्या प्रतलावर गोलाच्या अंतर्भागातील एकही बिंदू नसेल आणि प्रतल, गोलास केवळ एकाच बिंदूत छेदत असेल तर त्या प्रतलास काय म्हणता येईल ?

व्याख्या : गोलाचे स्पर्शप्रतल

जर एखादया गोलास, एखादे प्रतल एका आणि फक्त एकाच बिंदूत छेदत असेल तर त्या प्रतलास गोलाचे स्पर्श-प्रतल म्हणतात आणि या बिंदूस **स्पर्शबिंदू** म्हणतात.



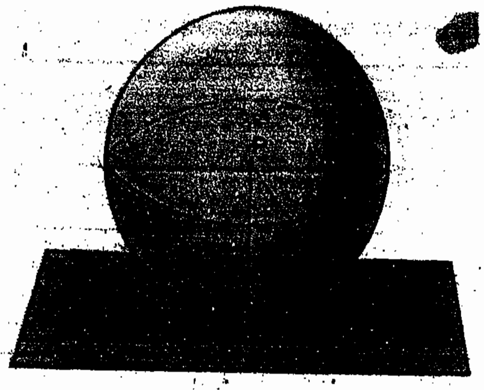
आ. 6·12

आ. 6·12 मधे प्रतल E गोलाचे स्पर्शप्रतल आहे. आणि बिंदू P हा स्पर्शबिंदू आहे.

§ 6·10 ▪ प्रमेय :

गोलाचे स्पर्शतल, स्पर्शबिंदूतून काढलेल्या त्रिज्येस लंब असते.

समजा एका गोलाचा केंद्र P आहे. गोलास T बिंदूत स्पर्श करीत असलेले प्रतल E आहे. गोलावरील T ह्या एकाच बिंदूत प्रतल E छेदते.



आ. 6·13

∴ प्रतल E वरील कोणताही एक बिंदू S घ्या. येथे बिंदू S च्या स्थितीबाबतीत तीन पर्याय संभवतात : (i) बिंदू S, गोलाच्या अंतर्भागात असेल; (ii) बिंदू S, गोलावर असेल. (iii) बिंदू S, गोलाच्या बाह्यभागात असेल.

आपण दाखवू की, पहिले दोन पर्याय असत्य आहेत. हे दोन पर्याय असत्य असल्यामुळे, असा निष्कर्ष काढता येईल की प्रतलावरील T शिवाय, कोणताही बिंदू गोलाच्या बाह्यभागात असतो. मग $l(PS) > l\ (PT)$ असे मिळेल. म्हणजेच, रेख PT, हा बिंदू P पासून प्रतल E पर्यंत काढलेल्या सर्व रेषाखंडांपेक्षा लहान आहे.

∴ रेख PT ⊥ प्रतल E

सिद्धता : (i) जर बिंदू S, गोलाच्या अंतर्भागातील असेल तर गोल आणि प्रतलाचा छेद, एक वर्तुळ होईल. याचाच अर्थ असा होईल की, गोलाचे स्पर्शप्रतल हे गोलास एका वर्तुळास छेदते, पण हे अशक्य आहे. (ii) जर बिंदू S, गोलावर असेल तर, $l(PS) = l(PT)$. म्हणजेच, गोल आणि प्रतल यांना समाईक असे दोन बिंदू होतील. परंतु प्रतल E, गोलाचे स्पर्शप्रतल असल्यामुळे, गोल आणि प्रतल यांना समाईक असे दोन भिन्न बिंदू असणार नाहीत.

म्हणून, बिंदू S, गोलाच्या बाह्यभागात असेल. वरील दोन्ही पर्याय असत्य असल्याने प्रमेय सिद्ध झाले. या प्रमेयाचा व्यत्यास देखील सत्य आहे.

§ 6·11 ▪ व्यत्यास :

गोलाच्या, कोणत्याही, त्रिज्येच्या बाह्यटोकाशी त्रिज्येस लंब असणारे प्रतल, गोलाचे स्पर्शप्रतल असते.

रेख PT, प्रतल E ला लंब असल्यामुळे, बिंदू T शिवाय, प्रतल E वरील, इतर कोणत्याही बिंदू S चे P पासूनचे अंतर, रेख PT च्या लांबीपेक्षा अधिक आहे.

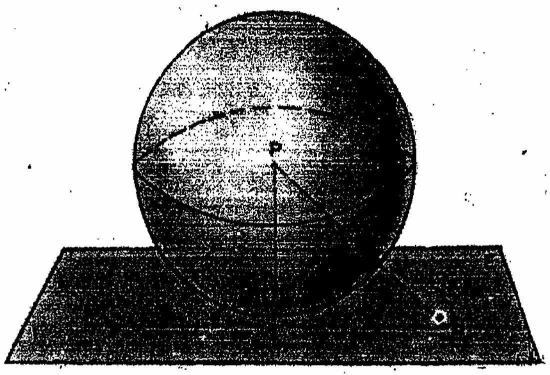
∴ $l(PT) < l(PS)$

परंतु $l(PT)$ ही गोलाची त्रिज्या आहे.

∴ प्रतल E वरील बिंदू T शिवाय, प्रत्येक बिंदू गोलाच्या बाह्यभागात आहे.

म्हणजेच प्रतल E गोलास एकमेव बिंदूत छेदते.

∴ हे प्रतल गोलाचे स्पर्शप्रतल आहे.



आ. 6·14

स्वाध्याय :

1. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(i) गोलास फक्त एका बिंदूत छेदणाऱ्या प्रतलास काय म्हणतात ? (ii) बिंदू Q, r त्रिज्येच्या गोलाच्या अंतर्भागात आहे, हे सिद्ध करण्यासाठी आवश्यक अट कोणती ? (iii) एखादे प्रतल गोलास छेदते असे आपण कोणत्या परिस्थितीत म्हणू शकतो ? (iv) समजा, Q केंद्र असणाऱ्या गोलास, एक प्रतल बिंदू T मध्ये स्पर्श करते. प्रतलातील रेषा AB ही T बिंदूतून जाते. रेषा AB आणि रेख QT यातील संबंध काय आहे ? (v) एका गोलाची त्रिज्या 10 आहे. गोलाच्या केंद्रापासून त्याच्या जीवेवर टाकलेल्या लंबाची लांबी 6 आहे. जीवेची लांबी काढा. (vi) एका गोलाच्या केंद्रापासून 9 अंतरावर असणारे एक प्रतल, त्याला ज्या वर्तुळात छेदते त्या वर्तुळाची त्रिज्या 40 आहे. तर गोलाची त्रिज्या काढा. (vii) गोलास स्पर्श करणारी रेषा गोलाच्या एखादया वर्तुळाची स्पर्शिका असते का ? (viii) ज्यांना समाविष्ट करणारी प्रतले एकमेकाना लंब असतील अशी गोलाची किती महावर्तुळे असतील ? (ix) गोलाच्या महावर्तुळाचा व्यास आणि त्रिज्या यातील संबंध काय असतो ?

2. बिंदू M, N, O आणि P हे रेषा L वरील बिंदू असून त्यांचे निर्देशक अनुक्रमे 0, 6, 2 आणि 40 आहेत. खाली दिलेल्या गोलाच्या संदर्भात N ची स्थिती खालीलप्रमाणे लिहा. जर N गोलावर असेल तर S लिहा. जर N गोलाच्या अंतर्भागात असेल तर I लिहा. जर N गोलाच्या बाह्यभागात असेल तर E लिहा.

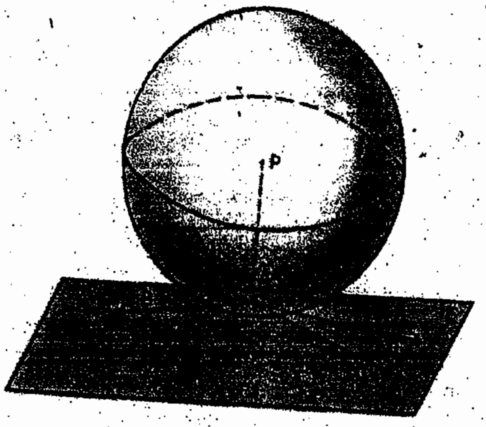
गोलाचा केंद्र	त्रिज्या	N ची स्थिती
M	6	
N	2	
O	30	
P	18	

3. खालील विधाने सत्य होण्यासाठी रिकाम्या जागी योग्य शब्द लिहा.

(i) जर गोल आणि प्रतल यांचा छेद———असेल तर दिलेले प्रतल हे गोलाचे स्पर्शप्रतल असते. (ii) स्पर्शप्रतलावरील स्पर्शबिंदूशिवाय इतर बिंदू गोलाच्या———असतात (iii) जर बिंदू A, हा गोलाचा केंद्र आणि त्रिज्या r असेल आणि $d(A, P) < r$ तर, बिंदू P हा गोलाच्या———असेल. (iv) गोलावरील तीन बिंदू एकरेषीय——— (असू शकतात/असू शकत नाहीत). (v) जर एक रेषा गोलास छेदत असेल तर त्यांच्या छेदामधे——— असतील किंवा———असेल. (vi) गोलाचा केंद्र हा गोलावर———(असतो/नसतो).

4. केंद्र P आणि त्रिज्या 12 असणाऱ्या गोलास छेदणाऱ्या प्रतलावरील बिंदू R आहे. जर P आणि R भिन्न बिंदू असतील तर खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत.

(i) $d(P, R) < 12$. (ii) बिंदू P हा दिलेल्या प्रतलावर असू शकत नाही. (iii) दिलेले प्रतल आणि गोल यांचा छेद वर्तुळ आहे. (iv) जर दिलेले प्रतल आणि गोल यांचा छेद,

5. 

आ. 6·15

केंद्र A आणि 12 त्रिज्या असणारे वर्तुळ असेल तर P=A. (v) जर दिलेले प्रतल आणि गोल यांचा छेद, केंद्र Q आणि 3 त्रिज्या असणारे वर्तुळ असेल तर रेख PQ हे प्रतलास लंब असेल.

P केंद्राच्या गोलास E हे एक प्रतल A बिंदूत स्पर्श करते (आ. 6·15.) बिंदू B, C, D हे प्रतल E वरील बिंदू आहेत.

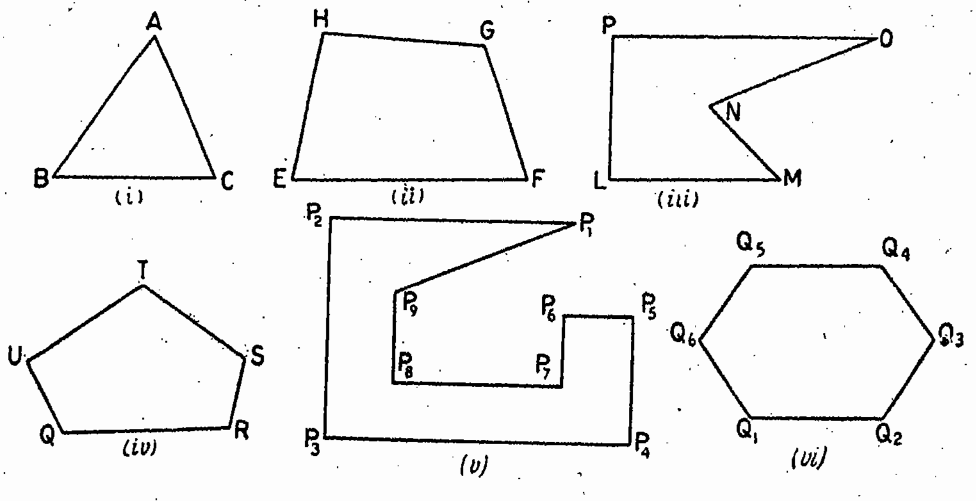
रेषा PA, रेषा AB, रेषा AC, आणि रेषा AD मधील संबंध सांगा.

6. 10 सेमी व्यासाच्या गोलाला केंद्रापासून 4 सेमी अंतरावर छेदणाऱ्या प्रतलामुळे मिळणाऱ्या वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

प्रकरण 7 : वर्तुळ : परिघ आणि क्षेत्रफळ

आपण नवव्या वर्गात, आपला अभ्यास त्रिकोण आणि चौकोन या भमितीय आकृतींपुरताच मर्यादित ठेवला होता. आपण या आकृतींचे वेगवेगळे गुणधर्म शिकलो, तसेच त्यांनी बंदिस्त केलेल्या क्षेत्रांच्या क्षेत्रफळासंबधीचेही ज्ञान मिळवले. या वर्षी आपणाला वर्तुळाच्या क्षेत्रफळासंबधी माहिती मिळवायची आहे. यासाठी प्रथम बहुभुजाकृती म्हणजे काय, त्याचे क्षेत्रफळ कसे काढायचे यासाठी विस्तृत चर्चा करणे आवश्यक ठरेल.

§ 7·1 खाली काही बहुभुजाकृती काढल्या आहेत.



आ. 7·1

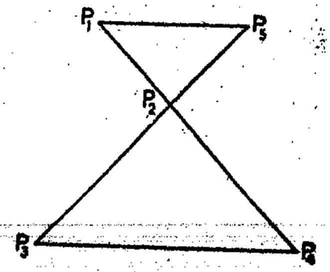
परंतु आकृती 7·2 बहुभुजाकृती नाही.

फक्त आकृत्या काढून या बहुभुजाकृती आहेत आणि या नाहीत असे म्हणण्यापेक्षा बहुभुजाकृती म्हणजे काय हे स्पष्ट होण्यासाठी खालील विवेचन उपयुक्त ठरेल.

आपण सांगितले की, आ. 7·1 (i) ते 7·1 (vi) या बहुभुजाकृती आहेत. या आकृत्यांपैकी प्रत्येक प्रतलीय आकृती आहे, आणि काही बिंदू क्रमवार रेषाखंडांनी जोडले आहेत. आ. 7·1 (i) मध्ये तीन नैकरेषीय बिंदू असून, तीन क्रमवार रेषाखंडांनी जोडले आहेत. यात, कोणतेही दोन रेषाखंड, त्यांच्या अंत्यबिंदूशिवाय इतर कोठेही छेदत नाहीत आणि कोणतेही दोन रेषाखंड, त्यांच्या समाईक बिंदूजवळ एकरेषीय नाहीत. तसेच आ. 7·1 (ii) मध्ये चार एकप्रतलीय आणि नैकरेषीय बिंदू असून ते चार क्रमवार रेषाखंडांनी जोडले आहेत. पुन्हा या आकृतीत, कोणत्याही दोन रेषाखंडांस त्यांच्या अंत्यबिंदू-शिवाय समाईक असा दुसरा कोणताही बिंदू नाही आणि कोणतेही दोन रेषाखंड त्यांच्या समाईक बिंदूजवळ एकरेषीय नाहीत. या दोन्ही आकृत्या बंद (closed) आहेत. आ. 7·1 (iii) ते (iv) देखील बंद आकृत्या आहेत. या आकृत्यांत देखील कोणत्याही दोन रेषाखंडांस त्यांच्या अंत्यबिंदूशिवाय इतर कोणतेही समाईक बिंदू नाहीत आणि कोणतेही दोन रेषाखंड, त्यांच्या समाईक बिंदूजवळ एकरेषीय नाहीत. म्हणून या आकृत्यांना (आ. 7·1) बहुभुजाकृती म्हणतात.

आ. 7·2 मध्ये बिंदू एकप्रतलीय असले तरी बाकीच्या दोन अटी पूर्ण होत नाहीत. येथे कोणती कमतरता आहे? रेख $P_1 P_2$ आणि रेख $P_2 P_4$ हे P_2 जवळ एकरेषीय आहेत किंवा रेख $P_1 P_4$ आणि रेख $P_3 P_5$ यांना एक समाईकबिंदू P_2 आहे. पण तो त्यांचा अंत्यबिंदू नाही.

बहुभुजाकृतीत जितके एकप्रतलीय बिंदू, तितक्याच त्यांच्या भुजा म्हणजे रेषाखंड असतात. वरील विवेचनावरून आपण बहुभुजाकृतीची व्याख्या करू.



आ. 7·2

§ 7·2 बहुभुजाकृतीची व्याख्या :

समजा $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}, P_n$ ($n \geqslant 3$) ही एकप्रतलीय भिन्न बिंदूंची एक मालिका आहे. n रेषाखंड रेख P_1P_2, रेख P_2P_3, ……, रेख $P_{n-1} P_n$ आणि P_nP_1 खालील अटी पाळीत आहेत.

(i) कोणत्याही दोन रेषाखंडांना त्यांच्या अंत्यबिंदूशिवाय इतर एकही बिंदू समाईक नाही; (ii) समाईक अंत्यबिंदू असणारे कोणतेही दोन रेषाखंड एकरेषीय नाहीत; तर अशा n रेषाखंडांच्या संयोगाला **बहुभुजाकृती** म्हणतात. अशा आकृतीला **बहुकोनाकृतीदेखील** म्हणतात.

एकप्रतलीय भिन्न बिंदू $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ पासून जी बहुभुजाकृती बनते त्या बिंदूंना बहुभुजाकृतीचे **शिरोबिंदू** (Vertices) म्हणतात आणि रेख P_1P_2, रेख P_2P_3,..., रेख $P_{n-1}P_n$ व रेख P_nP_1, आदि रेषाखंडांना बहुभुजाकृतीच्या **भुजा** (Sides) असे म्हणतात.

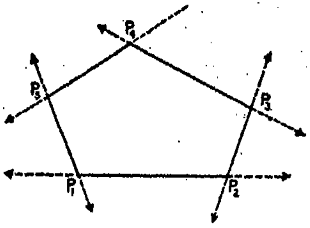
दोन रेषाखंड अथवा बहुभुजाकृतीच्या दोन भुजा, समाईक शिरोबिंदूपाशी एक कोन निश्चित करतात. या कोनास **बहुभुजाकृतीचा कोन** म्हणतात. म्हणून $\angle P_1P_2P_3$, $\angle P_2P_3P_4$,..., $\angle P_{n-1}P_nP_1$, $\angle P_nP_1P_2$ हे n कोन वरील बहुभुजाकृतीचे कोन आहेत. या आकृतीस एकूण n शिरोबिंदू, n भुजा आणि n कोन आहेत, म्हणून या बहुभुजाकृतीस n – **भुजाकृती** किंवा n – **कोनाकृती** असे म्हणतात.

जर $n=3$ असेल तर त्या बहुभुजाकृतीस त्रिभुज अथवा त्रिकोण म्हणतात, हे आपणास माहीत आहे. तसेच जर $n=4$ असेल तर बहुजाभुजाकृतीस चतुर्भुजाकृती किंवा चौकोन म्हणतात. जर $n=5$ असेल तर

बहुभुजाकृतीस पंचभुजाकृती किंवा पंचकोनाकृती म्हणतात. तसेच जर $n = 6, 7, 8, 10, 12$ असेल तर येणाऱ्या बहुभुजाकृतींना अनुक्रमे षट्भुजाकृती किंवा षट्कोनाकृती, सप्तभुजाकृती किंवा सप्तकोनाकृती, अष्टभुजाकृती किंवा अष्टकोनाकृती, दशभुजाकृती किंवा दशकोनाकृती आणि द्वादशभुजाकृती किंवा द्वादशकोनाकृती म्हणतात.

§ 7·3 बहिर्वक्र बहुभुजाकृती :

आपण यापूर्वी पाहिले आहे की, आ. 7·1 (i) ते आ. 7·1 (vi) बहुभुजाकृती आहेत. या बहुभुजाकृतीची प्रत्येक भुजा एका रेषेवर असते. 'प्रतलातील रेषा, प्रतलास दोन अर्धप्रतलात विभागते.' हे आपणास माहीत आहे. प्रत्येक भुजेस समाविष्ट करणाऱ्या रेषेमुळे जे दोन अर्धप्रतल होतात त्यांपैकी जर प्रत्येकवेळी, बहुभुजाकृती संबंधित भुजा वगळून संपूर्णपणे एकाच अर्धप्रतलात पडत असेल तर ती बहुभुजाकृती **बहिर्वक्र** असते, असे म्हणतात.

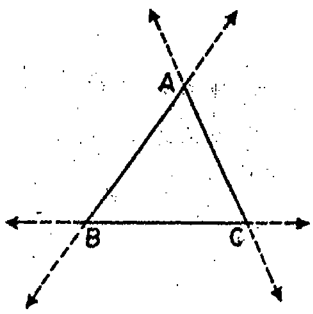


आ. 7·3

खाली एका बहिर्वक्र बहुभुजाकृतीची आकृती काढली आहे. ही बहुभुजाकृती बहिर्वक्र कशी बनते, हे आकृतीमध्ये बहुभुजाकृतीच्या भुजांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषा काढून दाखवल्या आहेत.

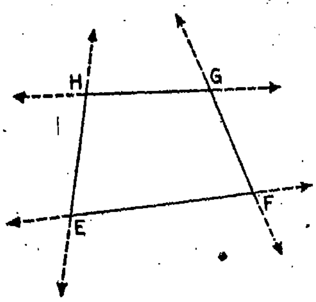
आपण आ. 7·3 ला बहिर्वक्र बहुभुजाकृती म्हणतो, पण यास बहिर्वक्र संच म्हणत नाही. आपण नवव्या वर्गात बहिर्वक्रसंचाबद्दल माहिती घेतली आहे आणि बहिर्वक्र संचाची व्याख्या पण केलीआहे. (बहिर्वक्र संचाची व्याख्या पाहा. भूमिती वर्ग नववा, प्रकरण 2.) बहिर्वक्र बहुभुजाकृती आणि तिचा अंतर्भाग मिळून बहिर्वक्र संच बनतो. म्हणून बहिर्वक्र बहुभुजाकृती आणि बहिर्वक्र संच यांतील भेद नीट समजून घ्यावा.

आता आपण आ. 7·1 (i) ते आ. 7·1 (vi) पैकी कोणत्या बहुभुजाकृती बहिर्वक्र आहेत ते पाहू.



आ. 7·4 (a)

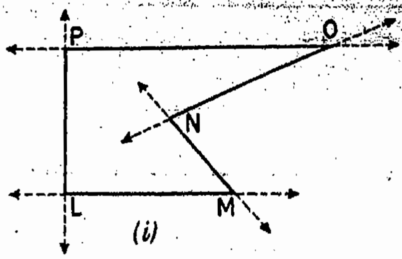
आ. 7·1 (i) घेऊन त्याच्या भुजांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषा आ. 7·4 (a) मध्ये काढल्या आहेत. या बहुभुजाकृतीच्या भुजांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषांमुळे बनणाऱ्या अर्धप्रतलांपैकी, प्रत्येक वेळी संबंधित भुजा वगळून संपूर्ण बहुभुजाकृती एकाच अर्धप्रतलात राहते. म्हणून ही (आ. 7·1) (i) बहुभुजाकृती बहिर्वक्र आहे.



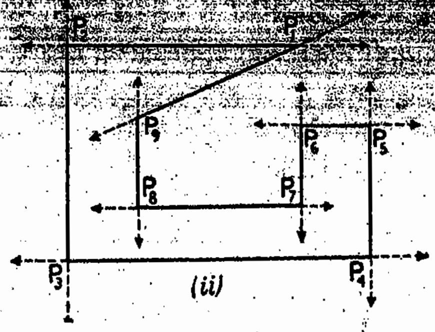
आ. 7·4 (b)

आ. 7·1 (ii) घेऊन त्याच्या भुजांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषा आ. 7·4 (b) मध्ये काढलेल्या आहेत. या रेषांमुळे बनणाऱ्या अर्धप्रतलांपैकी प्रत्येकवेळी संबंधित भुजा वगळून संपूर्ण बहुभुजाकृती एकाच अर्धप्रतलात राहते. म्हणून ही बहुभुजाकृती बहिर्वक्र आहे.

तसेच आ. 7·1 (iv) आणि आ. 7·1 (vi) या बहिर्वक्र बहुभुजाकृती आहेत. आ. 7·1 (iii) आणि आ. 7·1 (v) या मात्र बहिर्वक्र बहुभुजाकृती नाहीत, हे पाहण्यासाठी त्यांच्या भुजांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषा काढून खाली आ. 7·5 (i) आणि आ. 7·5 (ii) अनुक्रमे दाखवल्या आहेत.



आ. 7·5 (i)



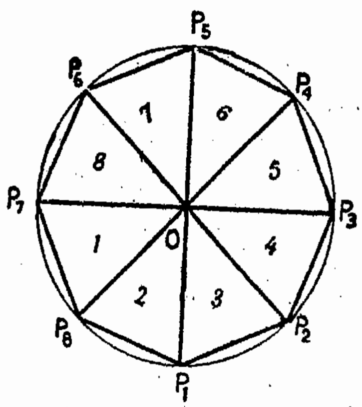
आ. 7·5 (ii)

आपणास आ. 7·5 (i) आणि आ. 7·5 (ii) मध्ये दिसते की, बहुभुजाकृतीच्या प्रत्येक भुजेस समाविष्ट करणाऱ्या रेषांमुळे बनणाऱ्या अर्धप्रतलांपैकी एकाच अर्धप्रतलात संबंधित भुजा वगळून संपूर्ण बहुभुजाकृती राहते असे नाही. म्हणून या दोन्ही बहुभुजाकृती बहिर्वक्र नाहीत.

§ 7·4 सुसम बहुभुजाकृती :

आपण बहुभुजाकृती आणि बहिर्वक्र बहुभुजाकृतींची माहिती घेतली. आता आपण सुसम बहुभुजाकृतीची माहिती घेऊ. आपणास माहीत आहे की, जर त्रिकोणाच्या सर्व भुजा एकरूप असतील तर त्यास समभुज त्रिकोण म्हणतात. त्याचे सर्व कोन एकरूप असून प्रत्येक कोनाचे माप 60 असते. त्याचप्रमाणे ज्या चौकोनाच्या सर्व भुजा एकरूप आणि सर्व कोन एकरूप असतात त्यास चौरस म्हणतात आणि त्याच्या प्रत्येक कोनाचे माप 90 असते. जर एखादया $n-$ भुजाकृतीच्या सर्व भुजा एकरूप असतील आणि त्याचे सर्व कोन एकरूप असतील तर त्यास काय म्हणता येईल ? आणि त्याच्या प्रत्येक कोनाचे माप काय असेल ?

समजा O केंद्र आणि r त्रिज्येचे एक वर्तुळ घेतले. समजा वर्तुळावरील एका बिंदूपासून सुरुवात करून त्यास n एकरूप कंसात विभागले. प्रत्येक कंसाची संगतजीवा काढली. या जीवांपासून आपणास एक n–भुजाकृती मिळेल. समजा, या बहुभुजाकृतीचे शिरोबिंदू P_1, P_2, P_3, ..., P_n आहेत. [आ. 7·6 मध्ये सोयीसाठी, $n=8$ घेतले आहे.] सर्व कंस एकरूप असल्यामुळे त्यांच्या संगतजीवादेखील एकरूप होतील. म्हणून आपणास



आ. 7·6

मिळालेल्या n–भुजाकृतीच्या **सर्व भुजा एकरूप** होतील.

समजा, वर्तुळकेंद्र O आणि n–भुजाकृतीच्या सर्व शिरोबिंदूंना सांधून रेषाखंड काढले. आपणास एकूण n समद्विभुज त्रिकोण मिळतात. वर्तुळास n एकरूप चापात विभागले असल्यामुळे प्रत्येक कंसाचे माप $\frac{360}{n}$ होईल. म्हणजेच

$$m\angle P_1OP_2 = m\angle P_2OP_3 = \cdots\cdots\cdots = m\angle P_nOP_1 = \frac{360}{n}$$

सर्व n त्रिकोण समद्विभुज आहेत आणि प्रत्येकाचे O जवळील शिरोकोन एकरूप आहेत, कारण प्रत्येकाचे माप $\frac{360}{n}$ आहे. म्हणून बाकोबा गृहीतकावरून सर्व त्रिकोण परस्परांशी एकरूप आहेत. बहुभुजाकृतीचा प्रत्येक कोन हा दोन संलग्न त्रिकोणाच्या पायालगतच्या दोन कोनांच्या बेरजेबरोबर आहे. यावरून, आपण

असे सांगू शकतो की, वरील n–भुजाकृतीच्या प्रत्येक कोनाचे माप हे मिळणाऱ्या n समद्विभुज त्रिकोणांपैकी कोणत्याही त्रिकोणाच्या पायालगतच्या एका कोनाच्या मापाच्या दुपटीएवढे असते.

म्हणजेच वरील n–भुजाकृतीच्या प्रत्येक कोनाचे माप

$$= \left[180 - \frac{360}{n}\right] = \left[\frac{180n - 360}{n}\right] = \frac{180\,[n-2]}{n}$$

म्हणून, या n–भुजाकृतीचे **सर्व कोन एकरूप** आहेत. अर्थातच या n–भुजाकृतीच्या सर्व कोनांच्या मापांची बेरीज, $n \times \frac{180\,[n-2]}{n}$ किंवा $180\,(n-2)$ होईल.

वरील चर्चेवरून आपणास दिसते की, वरील n–भुजाकृतीच्या सर्व भुजा एकरूप आहेत आणि त्याचे सर्व कोनही एकरूप आहेत. अशा प्रकारच्या बहुभुजाकृतीस **सुसमबहुभुजाकृती** म्हणतात.

§ 7·5 सुसम बहुभुजाकृतीची व्याख्या :

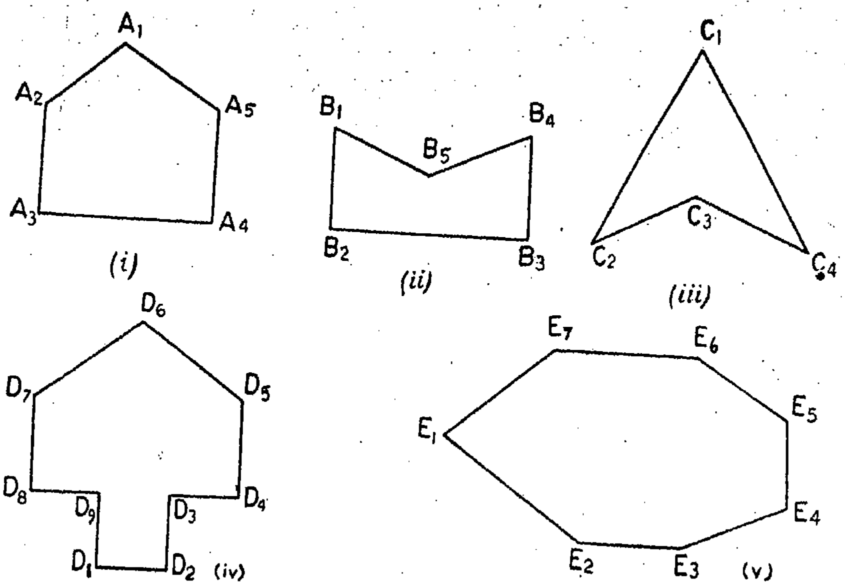
जर एखादी बहुभुजाकृती पुढील अटी पाळीत असेल, (i) त्याच्या सर्व भुजा एकरूप आहेत, (ii) त्याचे सर्व कोन एकरूप आहेत, आणि (iii) ती बहिर्वक्र आहे. तर त्या बहुभुजाकृतीस सुसम बहुभुजाकृती म्हणतात.

आ. 7·6 मधे बहुभुजाकृतीचा प्रत्येक शिरोबिंदू वर्तुळावर आहे. अशा वर्तुळास **बहुभुजाकृतीचे परिवर्तुळ** (Circum Circle) म्हणतात.

सर्व त्रिकोणांचे परिवर्तुळ काढता येते पण प्रत्येक चौकोनाचे परिवर्तुळ काढता येईल असे नाही. वर्तुळाच्या प्रकरणात आपण पाहिले आहे की, ज्या चौकोनाचे परिवर्तुळ काढता येते त्यास 'चक्रीय चौकोन' म्हणतात आणि ते काढता येण्यासाठी काही अटी पाळाव्या लागतात. तसेच प्रत्येक बहुभुजाकृतीचे $(n > 4)$ परिवर्तुळ काढता येतेच असे नाही. परंतु प्रत्येक सुसम बहुभुजाकृतीचे, मात्र परिवर्तुळ काढता येते. या परिवर्तुळाच्या केंद्राला **सुसम बहुभुजाकृतीचा केंद्र** म्हणतात.

§ 7·5 प्रश्न :

1. (i) आ. 7·7 मधील बहुभुजाकृतींच्या शिरोबिंदूंची आणि बाजूंची नावे लिहा. (ii) जर आ. 7·7 मधील बहुभुजाकृती बहिर्वक्र असतील तर त्यांच्या शिरोबिंदूंच्या संख्येवरून नाव दया. (iii) जर



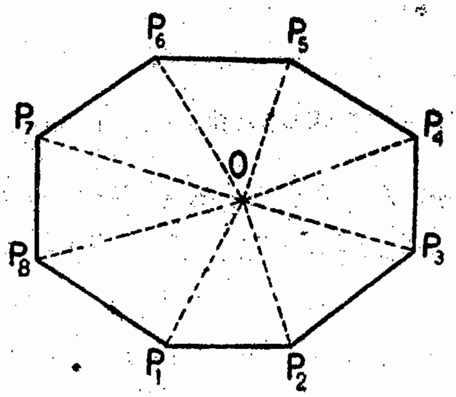
आ. 7·7

बहुभुजाकृती बहिर्वक्र नसेल तर, ज्या भुजांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषेमुळे बनणाऱ्या दोन्ही अर्ध-प्रतलांत बहुभुजाकृती पडत असतील, त्या भुजांची नावे लिहा.

2. खाली दिलेल्या बहुभुजाकृतींची परिवर्तुळे काढता येण्याच्या हेतूने पुढीलपैकी कोणती विधाने लागू पडतात ते सांगा. (A) नेहमी काढता येते. (B) काही विशिष्ट परिस्थितीत काढता येते. (C) मुळीच काढता येत नाही.

	A/B/C
(i) समभुज त्रिकोण	
(ii) विशालकोन त्रिकोण	
(iii) चौकोन	
(iv) पंचभुजाकृती	
(v) बहिर्वक्र नसणारा षट्कोन	
(vi) सुसम दशभुजाकृती	
(vii) आयत	
(viii) बहिर्वक्र नसणारी बहुभुजाकृती	
(ix) बहिर्वक्र बहुभुजाकृती	
(x) सुसम बहुभुजाकृती	

3. 'बहुभुजाकृतीचे कोणतेही दोन शिरोबिंदू जोडणारा जो रेषाखंड तिची भुजा नसेल त्या रेषाखंडाला बहुभुजाकृतीचा कर्ण म्हणतात.'
पुढील बहुभुजाकृतींच्या सर्व कर्णांची संख्या लिहा : (a) समांतरभुज चौकोन, (b) बहिर्वक्र पंचकोन, (c) बहिर्वक्र षट्कोन, (d) बहिर्वक्र चौकोन, (e) त्रिकोण.

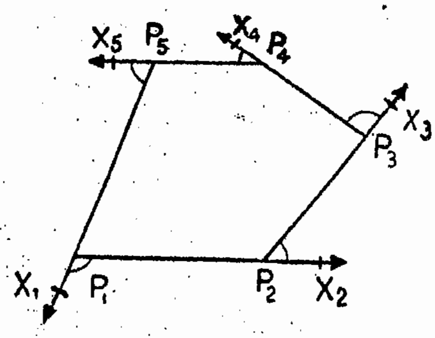


आ. 7·8

4. बाजूच्या बहुभुजाकृतीच्या अंतर्भागातील O एक बिंदू आहे. बिंदू O आणि बहुभुजाकृतीचे सर्व शिरोबिंदू जोडले आहेत.
(i) आकृतीत तुम्हाला किती त्रिकोण दिसतात ? (ii) सर्व त्रिकोणांच्या सर्व कोनांच्या मापाची बेरीज किती ? (iii) बिंदू O जवळ बनणाऱ्या सर्व कोनांची नांवे लिहा. (iv) वरील उदा. (iii) मधील सर्व कोनांच्या मापांची बेरीज किती ? (v) बहुभुजाकृतीच्या सर्व कोनांच्या मापांची बेरीज काय येईल ?

5. $\angle X_1P_1X_2$, $\angle X_2P_2X_3$,..., $\angle X_5P_5X_1$ यांना बहुभुजाकृतीचे बाह्यकोन म्हणतात. खालील बहुभुजाकृतींच्या सर्व बाह्यकोनांच्या मापांची बेरीज काढा.
(i) त्रिकोण (ii) चौकोन (iii) बहिर्वक्र पंचकोन (iv) बहिर्वक्र षट्कोन (v) बहिर्वक्र अष्टकोन.

[सूचना : वरील उदा. (5) आणि (6) चे निष्कर्ष आणि रेषीय जोडी यांचे साहाय्य घ्या.]



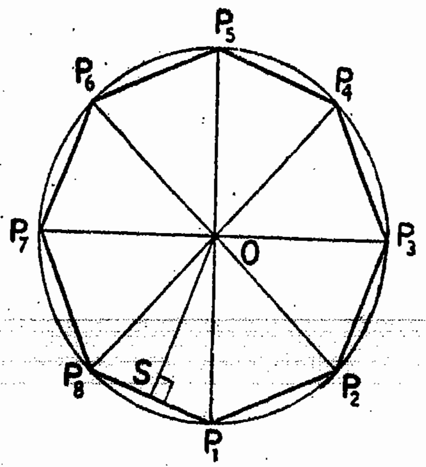
आ. 7·9

6. खालील कोष्टकातील रिकाम्या जागा भरा.

	सुसम बहुभुजाकृती	सुसम बहुभुजाकृतीच्या प्रत्येक कोनाचे माप	सुसम बहुभुजाकृतीच्या कोनाचे माप (त्याच्या परिवर्तुळाच्या संदर्भात)
1	चौरस	...	90
2	...	60	120
3	षट्कोन	120	...
4	पंचकोन	...	...
5	अष्टकोन	...	...

§ 7·6 सुसम बहुभुजाकृतीचे क्षेत्रफळ :

आपणास माहीत आहे की, कोणत्याही त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या पाया आणि त्यावरील उंचीच्या गुणाकाराच्या निम्मे असते. कोणत्याही बहुभुजाकृतीचे क्षेत्रफळ, त्यास त्रिकोणाकृती विभागात विभागून काढता येते. आता, आपण सुसम n–भुजाकृतीचे क्षेत्रफळ कसे काढता येईल ते पाहू.



आ. 7·10

समजा $P_1\ P_2\ P_3 \ldots P_n$ ही एक सुसम n–भुजाकृती आहे. समजा या सुसम बहुभुजाकृतीला अंतर्लिखित करणाऱ्या वर्तुळाचा केंद्र O आहे. प्रत्येक शिरोबिंदू आणि O जोडा. मग आपणास n एकरूप त्रिकोण मिळतील. म्हणजेच, $\triangle P_1OP_2 \cong \triangle P_2OP_3 \cong \ldots \cong \triangle P_{n-1}OP_n \cong \triangle P_nOP_1$.

म्हणून या सर्व त्रिकोणांचे समान पाये, e आणि सर्व त्रिकोणांची समान उंची, a आहे असे समजा.

प्रत्येक त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}\, e \cdot a$

$\therefore$ सुसम n–भुजाकृतीचे क्षेत्रफळ $= n \times \frac{1}{2} \times ea = \frac{1}{2}\,(n \times e) \times a$.

$n \times e$ ही सुसम n–बहुभुजाकृतीची परिमिती आहे. समजा सुसम n–बहुभुजाकृतीची परिमिती p आहे. मग $n \times e = p$ $\quad \therefore$ सुसम n–बहुभुजाकृतीचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}\, p \times a$.

[टीप : सुसम बहुभुजाकृतीच्या केंद्रापासून त्याच्या भुजेवर काढलेल्या लंबाच्या लांबीला आपण **केंद्रभुजांतर** हे नाव देऊ.]

§ 7·7 प्रश्न :

1. एका सुसम बहुभुजाकृतीची परिमिती 48 सेमी आहे. जर त्याचे केंद्रभुजांतर 6 सेमी असेल तर त्याचे क्षेत्रफळ काढा.
2. एका सुसम द्वादशभुजाकृतीची भुजा 12 सेमी आहे आणि त्याचे केंद्रभुजांतर 23·5 सेमी आहे. त्याचे क्षेत्रफळ काढा.
3. एका सुसम षट्कोनाची भुजा 10 सेमी आहे. त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

[सूचना : समभुज त्रिकोणाची उंची $= \dfrac{\text{भुजा} \times \sqrt{3}}{2}$]

4. एका सुसम षट्कोनाची परिमिती 48 सेमी आहे. त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

5. सिद्ध करा की, S भुजा असणाऱ्या सुसम षट्कोनाचे क्षेत्रफळ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ S^2 असते.

6. एका सुसम षट्कोनाचे क्षेत्रफळ $24\sqrt{3}$ चौ. एकक आहे. त्याची भुजा काढा.

7. एक सुसम षट्कोन, वर्तुळात अंतर्लिखित केला आहे जर परिवर्तुळाची त्रिज्या 4 सेमी असेल तर षट्कोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

8. एका सुसम षट्कोनाचे क्षेत्रफळ 600 चौसेमी आहे तर त्याची परिमिती काढा.

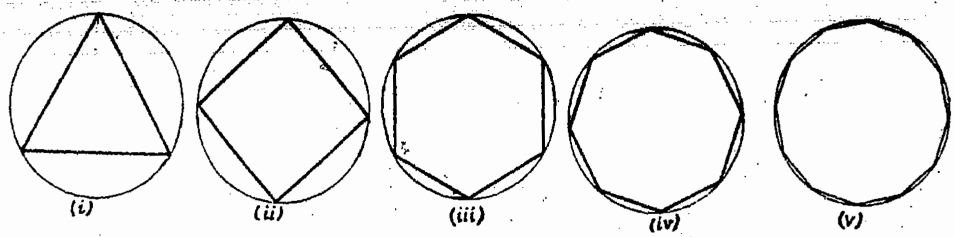
9. एका सुसम दशभुजाकृती बागेची भुजा 50 मीटर आहे आणि त्याचे केंद्रभुजांतर 77 मीटर आहे. प्रति चौ. मीटरला 20 पैसे प्रमाणे बागेच्या सफाईचा खर्च काढा.

10. एका सुसम षट्कोनाकृती शेताच्या मशागतीचा खर्च प्रति चौमीला 20 पैसेप्रमाणे 5196 रु. होतो. त्याच्याभोवती, प्रति मीटर 50 पैसे दराने तारेचे कुंपण घालण्याचा खर्च काढा. [$\sqrt{3} = 1{\cdot}732$]

§ 7·8 वर्तुळाचा परिघ :

समजा, r त्रिज्या असणाऱ्या वर्तुळाचा परिघ c ने दर्शवला. आपण c ची किंमत कशी काढायची ते पाहू. परिघ वक्र असल्यामुळे त्याची लांबी सामान्य पद्धतीने काढता येत नाही.

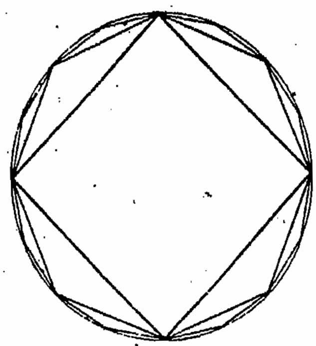
खालील आकृतींमध्ये आ. [7·11 (i) ते (v)] आपणास असे दिसेल की, जसजशी सुसम बहुभुजाकृतीच्या भुजांची संख्या वाढते तसतशी त्याची परिमिती वर्तुळाच्या परिघाजवळ जाते.



आ. 7·11

म्हणजेच परिघ आणि सुसम बहुभुजाकृतीची परिमिती यांतील अंतर कमी होत जाते ही बाब आपण आ. 7·14 मध्ये स्पष्टपणे पाहू शकतो.

या आकृतीत (आ. 7·12) चौरस, सुसम अष्टभुजाकृती आणि सुसम 16–भुजाकृती एकाच वर्तुळात अंतर्लिखित केलेल्या आहेत.



आ. 7·12

जर आपण n ला खूप मोठी किंमत दिली तर सुसम n–भुजाकृतीच्या परिमितीची लांबी त्याच्या परिवर्तुळाच्या परिघाच्या किमतीच्या पुष्कळच जवळची होईल. आपण असे देखील म्हणू शकतो की, परिघ, c ची अंदाजी किंमत ही त्या वर्तुळात अंतर्लिखित असलेल्या सुसम n–भुजाकृतीच्या परिमितीची **मर्यादा** होय. जर सुसम n–भुजाकृतीची परिमिती p ने दाखवली तर, वरील विधान $p \rightarrow c$ या चिन्हाने दाखवू.

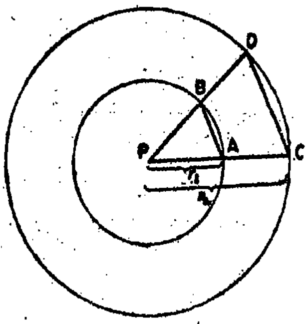
व्याख्या : वर्तुळाचा परिघ :

वर्तुळाचा परिघ म्हणजे, त्यात अंतर्लिखित केलेल्या सुसम n-भुजाकृतींच्या परिमितीची मर्यादा होय.

§ 7·9 वर्तुळाचा परिघ आणि त्याचा व्यास यांचे गुणोत्तर π या ग्रीक अक्षराने दाखवतात. आपणास माहीत आहे की π ही परिमेय संख्या नाही. म्हणजेच ही एक अपरिमेय संख्या आहे. π ची अंदाजी किंमत $\frac{22}{7}$ आहे हे खालीलप्रमाणे लिहितात.

$$\pi \doteqdot \frac{22}{7}$$

वर्तुळाचा परिघ आणि त्याचा व्यास यांतील गुणोत्तर, कोणत्याही त्रिजेच्या वर्तुळाच्या बाबतीत स्थिर असते म्हणजेच कोणत्याही वर्तुळाचा परिघ आणि त्याचा व्यास यांचे गुणोत्तर π असते. हे आपण खालीलप्रमाणे पाहू शकतो.



आ. 7·13

समजा, P केंद्र असणारी दोन एककेंद्री वर्तुळे आहेत. समजा, त्यांच्या त्रिज्या अनुक्रमे r_1 आणि r_2 आहेत. दोन्ही वर्तुळांत अंतर्लिखित अशा सुसम n– भुजाकृती काढल्या समजा मोठ्या वर्तुळातील अंतर्लिखित सुसम n– भुजाकृतीची एक भुजा, रेख CD आहे आणि लहान वर्तुळातील अंतर्लिखित सुसम n– भुजाकृतीची एक भुजा, रेख AB आहे.

$\triangle$PCD आणि $\triangle$PAB हे दोन्ही समद्विभुज त्रिकोण आहेत आणि त्यांचे P जवळील कोनांचे माप $\frac{360}{n}$ आहे.

$\therefore \angle APB \cong \angle CPD$

$\therefore$ बाकोबा सरूपता प्रमेयानुसार, $\triangle PCD \sim \triangle PAB$.

$$\therefore \quad \frac{l(AB)}{l(PA)} = \frac{l(CD)}{l(PC)}$$

परंतु $l(PA) = r_1$ आणि $l(PC) = r_2$

$$\therefore \quad \frac{l(AB)}{r_1} = \frac{l(CD)}{r_2}$$

म्हणजेच, $n \times \frac{l(AB)}{r_1} = n \times \frac{l(CD)}{r_2}$

आता असे समजा की, सुसम n–भुजाकृतींच्या परिमिती अनुक्रमे p_1 आणि p_2 आहेत.

म्हणजेच $n \times l(AB) = p_1$ आणि $n \times l(CD) = p_2$

$$\therefore \quad \frac{p_1}{r_1} = \frac{p_2}{r_2} \qquad \ldots(1)$$

समजा, वर्तुळांचे परिघ अनुक्रमे C_1 आणि C_2 आहेत.

जर n ला खूप मोठी किंमत दिली तर,

$$p_1 \to C_1 \text{ आणि } p_2 \to C_2$$

$$\therefore \quad \frac{C_1}{r_1} = \frac{C_2}{r_2}$$

म्हणून $\frac{C_1}{2 \times r_1} = \frac{C_2}{2 \times r_2}$

$\therefore$ वर्तुळ परिघ आणि त्याचे व्यास यातील गुणोत्तर $\frac{C}{2r}$ हे दोन्ही वर्तुळाच्या बाबतीत स्थिर आहे. हे कोणत्याही वर्तुळाच्या बाबतीत सत्य असते. हे स्थिर गुणोत्तर π ने दाखवतात.

$\therefore \frac{C}{2r} = \pi$ किंवा $C = \pi \times 2r$

$C = 2\pi r$ किंवा $C = \pi d$, $d =$ वर्तुळाचा व्यास $= 2r$

§ 7·10 प्रश्न :

1. सायकलच्या चाकाचा व्यास 84 सेमी. आहे. चाकाच्या 100 फेऱ्यांत, सायकल किती अंतर जाईल ?
2. एका वर्तुळाकृती बागेची त्रिज्या 35 मीटर आहे. एक मनुष्य त्या बागेभोवती 20 फेऱ्या मारतो तर तो किती अंतर चालला हे काढा.
3. एका वर्तुळाकृती शेताचा व्यास 125 मीटर आहे. त्याच्या भोवती तारेचे कुंपण लावण्याचा एकूण खर्च काढा. कुंपण लावण्याचा खर्च प्रती मीटर 0·20 रु. आहे. [$\pi \doteq 3{\cdot}14$]
4. आगगाडीच्या इंजिनच्या चाकाचा व्यास 112 सेमी आणि डब्याच्या चाकाचा व्यास 42 सेमी आहे. इंजिनच्या चाकाच्या 120 फेऱ्यात डब्याच्या चाकाचे किती फेरे होतील ?
5. एका वर्तुळाकृती मैदानाचा व्यास 153 मीटर आहे. 90 सेमी व्यासाच्या सायकलीने मैदानाभोवती एक फेरा पूर्ण केला. सायकलच्या चाकाचे फेरे काढा.
6. जर एका बसच्या चाकाचे एका मिनिटात 210 फेरे होत असतील आणि तिच्या चाकाचा व्यास 90 सेमी असेल तर बसचा ताशी वेग काढा.
7. एका घोडा-गाडीच्या मागच्या चाकाचा व्यास 1·2 मी. आहे. जर तिच्या मागील चाकाच्या 50 फेऱ्यांत तिच्या पुढील चाकाचे 200 फेरे होत असतील तर तिच्या पुढील चाकाचा व्यास काढा
8. जर पृथ्वीच्या विषुववृत्ताची लांबी 40,260 किमी असेल तर पृथ्वीचा व्यास काढा. (समजा की, पृथ्वी गोलाकृती आहे.)
9. दोन एककेंद्री वर्तुळांचे परिघ 1·100 किमी आणि 1·540 किमी आहेत. त्यांतील किमान अंतर काढा.
10. दोन एककेंद्री वर्तुळांच्या परिघांतील अंतर 7 मीटर आहे. जर लहान वर्तुळाची त्रिज्या 42 मीटर असेल तर मोठ्या वर्तुळाचा परिघ काढा.
11. एका वर्तुळाकृती बागेभोवती, बाहेरून, 3·5 मीटर रुंदीचा रस्ता आहे. जर बागेचा व्यास 70 मीटर असेल तर रस्त्याच्या दोन्ही कडांच्या लांबीतील अंतर काढा.
12. चंद्राचे पृथ्वीपासूनचे अंतर, अंदाजे, 3,84,000 किमी आहे. चंद्राचा पृथ्वीच्या परिक्रमेचा मार्ग वर्तुळाकृती समजला तर त्याच्या पृथ्वीभोवतीच्या एक फेऱ्यात किती अंतर कापले जाईल ते काढा.

§ 7·11 वर्तुळाचे क्षेत्रफळ :

क्षेत्रफळाच्या प्रकरणात आपण बहुभुजाकृतीची व्याख्या मूळ विभागाने, म्हणजेच त्रिकोणाकृती विभागाने केली आहे. त्रिकोणाकृती विभाग म्हणजे त्रिकोण आणि त्याच्या अंतर्भागाचा संयोग होय. वर्तुळाच्या क्षेत्रफळाविषयी देखील आपण अशीच व्याख्या करू.

व्याख्या : वर्तुळाकृती विभाग :

वर्तुळ आणि त्याच्या अंतर्भागाच्या संयोगाला 'वर्तुळाकृती विभाग' म्हणतात.

यापूर्वी आपण त्रिकोणाकृती विभागाचे क्षेत्रफळ म्हणण्याऐवजी त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ असे म्हणण्याचे ठरवले आहे. त्याप्रमाणे, वर्तुळाकृती क्षेत्रफळाचे क्षेत्रफळ म्हणण्याऐवजी आपण सोयीसाठी, वर्तुळाचे क्षेत्रफळ म्हणू.

आपण यापूर्वीच पाहिले आहे की, सुसम n–भुजाकृतीचे क्षेत्रफळ $=\frac{1}{2}\times p\times a$.
p म्हणजे सुसम n–भुजाकृतीची परिमिती आणि a म्हणजे n–भुजाकृतीचे केंद्रभुजांतर आहे. आपण सुसम n–भुजाकृतीचे क्षेत्रफळ, A_n ने दाखवू.

$$\therefore A_n=\frac{1}{2}\times p\times a.$$

या सूत्रांत तीन गोष्टी n च्या किमतीवर अवलंबून आहेत. (i) p (ii) a (iii) A_n.

आता आपणास पाहावयाचे आहे की, n ची किंमत वाढवल्यास या तिघांच्या (p, a आणि A_n) किमतीवर काय परिणाम होईल ?

(i) वर्तुळ परिघाच्या व्याख्येवरून आपणास माहीत आहे की, $p\to c$.

(ii) 'a' ही संख्या, सुसम n–भुजाकृतीच्या केंद्रापासून त्याच्या भुजेवर लंबरेषाखंडाची लांबी आहे. अर्थात ही संख्या त्रिज्येपेक्षा लहान ससेल, कारण काटकोन त्रिकोणाच्या कोणत्याही भुजेची लांबी त्याच्या कर्णाच्या लांबीपेक्षा लहान असते. पण जर n ला खूप मोठी किंमत दिली तर a आणि r यांच्यातील फरक पाहिजे तेवढा कमी करता येतो. म्हणजेच, $a\to r$.

(iii) सुसम n–भुजाकृती, त्याच्या परिवर्तुळात अंतर्लिखित केलेली आहे. म्हणून सुसम n–भुजाकृतीचे क्षेत्रफळ त्याच्या परिवर्तुळाच्या क्षेत्रफळापेक्षा लहान असेल. आ. 7·12 मध्ये आपणास दिसेल की, n ची किंमत जसजशी वाढते तसतशी सुसम n–भुजाकृतीचे क्षेत्रफळ आणि त्याच्या परिवर्तुळाचे क्षेत्रफळ यांतील फरक कमी कमी होत जातो. म्हणून आपणास असे सांगता येईल की, $A_n\to A$; ($A=$ वर्तुळाचे क्षेत्रफळ)

$\therefore$ (i) आणि (ii) मधील निर्णयावरून, $\frac{1}{2}\times p\times a\to\frac{1}{2}\times c\times r$.

पण वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $=A$ घेतले आहे.

$\therefore A=\frac{1}{2}\times r\times c$.

पण $c=2\times\pi r$ $\quad\therefore A=\frac{1}{2}\times r\times 2\pi r\quad\therefore A=\pi r^2$

$\therefore$ वर्तुळाचे क्षेत्रफळ (वर्तुळाकृती विभागाचे क्षेत्रफळ)

$=\pi r^2$,

$=\pi\dfrac{d^2}{4}$ [d वर्तुळाचा व्यास समजा]

§ 7·13 प्रश्न :

1. वर्तुळांच्या त्रिज्या दिल्या आहेत. त्यांचे परिघ आणि क्षेत्रफळ काढा : (i) 5 सेमी (ii) 10 सेमी (iii) n सेमी (iv) $10n$ सेमी (v) $100n$ सेमी ($\pi\doteq 3{\cdot}1416$) :
2. वर्तुळांचे परिघ दिले आहेत. त्यांचे क्षेत्रफळ काढा : (i) 440 सेमी (ii) 528 मीटर (iii) 74·8 मीटर (iv) 6·6 मीटर (v) 33 मीटर

3. एका वर्तुळाकृती बागेभोवती तारेचे कुंपण घालण्याचा खर्च प्र. मीटर 50 पैसेप्रमाणे 157 रु. आहे. बागेचे क्षेत्रफळ काढा. ($\pi = 3{\cdot}14$)

4. एका वर्तुळाकृती बागेभोवती तारेचे कुंपण लावण्याचा खर्च प्र. मीटर 40 पैसेप्रमाणे 3872 रु. आहे. जर त्या बागेच्या मशागतीचा खर्च प्र. 100 चौ. मी. ला 1 रु. असेल तर मशागतीचा एकूण खर्च काढा.

5. एका चौरसाची परिमिती वर्तुळ परिघाच्या समान आहे. जर चौरसाची परिमिती 24·2 मीटर असेल तर वर्तुळाचे क्षेत्रफळ काढा.

6. एका वर्तुळाकृती बागेचे क्षेत्रफळ 3 हेक्टर 4650 चौमी आहे. त्याच्याभोवती तारेचे कुंपण लावण्याचा खर्च प्रती मीटर 2·50 रु. प्रमाणे काढा.

7. एका वर्तुळाकृती बागेचा व्यास 56 मीटर आहे. त्याच्या आतील भागात कडेनी 7 मीटर रुंदीची हरळी लावली आहे. हरळी असणाऱ्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

8. दोन एककेंद्री वर्तुळे आहेत. लहान वर्तुळाचे क्षेत्रफळ 616 चौमीटर आहे. मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या लहान वर्तुळाच्या त्रिज्येपेक्षा 3·5 मीटरने मोठी आहे. वर्तुळांमधील भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

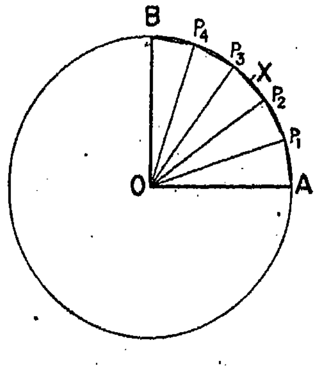
9. एका चौरसाची भुजा 10 सेमी आहे. त्याच्या परिवर्तुळाचे आणि आंतरस्पर्शी वर्तुळाचे क्षेत्रफळ काढा.

10. एका समभुज त्रिकोणाचे परिवर्तुळ काढले आहे. जर त्याची भुजा 12 सेमी असेल तर परिवर्तुळाचे क्षेत्रफळ काढा.

§ 7·14 ■ वर्तुळ कंसाची लांबी :

आपण वर्तुळ परिघाची व्याख्या, 'वर्तुळात अंतर्लिखित सुसम n – भुजाकृतीच्या परिमितीची मर्यादा' अशी केली आहे. याचप्रमाणे, आपण वर्तुळाच्या कंसाच्या लांबीची व्याख्या करू.

समजा एका वर्तुळाचा केंद्र O आहे. आणि कंस AXB हा दिलेल्या वर्तुळाचा कंस आहे. कंस AXB वर बिंदू $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$ असे घेतले की, $m\angle AOP_1 = m\angle P_1OP_2 = m\angle P_2OP_3 = \ldots = m\angle P_{n-1}OB$. म्हणजेच कंस AXB ला n एकरूप कंसात विभागले.



आ. 7·14

या प्रत्येक कोनाचे माप $= \dfrac{1}{n}\,[m(\text{कंस AXB})]$ आहे.

रेख AP_1, रेख P_1P_2, …, रेख $P_{n-1}B$ काढा.

जर n ला खूप मोठी किंमत दिली तर वरील रेषाखंड प्रत्येकी कंसाजवळ जाईल. म्हणजेच जर n ला मोठी किंमत दिल्यास $l(AP_1) + l(P_1P_2) + \ldots + (P_{n-1}B)$ या संख्येची मर्यादा, कंस AXB ची लांबी होईल.

व्याख्या : वर्तुळ कंसाची लांबी :

जर बिंदू $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$ हे कंस AXB ला n एकरूप कंसात विभागत असतील तर कंस AXB ची लांबी म्हणजे, $l(AP_1) + l(P_1P_2) + \ldots + l(P_{n-1}B)$ ची मर्यादा होय.

संपूर्ण वर्तुळ हे सुद्धा 360 माप असणारा कंस आहे असे म्हणता येईल. वर्तुळावरील कोणताही बिंदू कंसाचे (समाईक) अंत्यबिंदू आहेत असे समजता येईल. म्हणजेच वर्तुळ हा 360 माप असणारा कंस समजता येईल. म्हणून परिघ म्हणजेच 360 माप असणाऱ्या कंसाची लांबी होय.

आपणास माहीत आहे की वर्तुळ परिघाची लांबी त्याच्या त्रिज्येवर अवलंबून असते. तसेच वर्तुळ कंसाची लांबी ही त्याच्या त्रिज्येवर आणि त्याच्या मापावर अवलंबून असते.

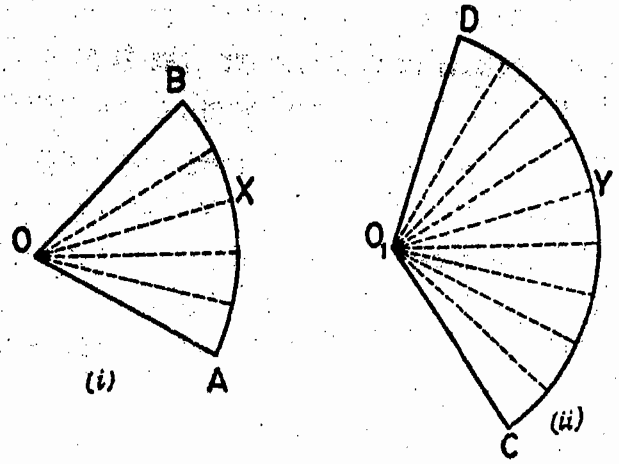
दोन कंसांच्या त्रिज्या समान असतील तर त्यांची लांबी त्यांच्या मापाच्या प्रमाणात असते.

[वरील विधानाची सिद्धता क्लिष्ट आणि अवघड आहे म्हणून येथे सिद्धता वगळण्यात येत आहे.]

समजा कंस AXB आणि कंस CYD च्या त्रिज्या समान आहेत.

$$\therefore \frac{l\,(\text{कंस AXB})}{m\,(\text{कंस AXB})} = \frac{l\,(\text{कंस CYD})}{m\,(\text{कंस CYD})}$$

समजा, एका कंसाचे माप 'q' आणि त्रिज्या r आहे. समजा या कंसाची लांबी t आहे. आपण यापूर्वी पाहिले की, वर्तुळ हा 360 मापाचा एक कंस आहे.



आ. 7·15

$$\therefore \frac{t}{q} = \frac{c}{360}, \text{ पण } c = 2\pi r \quad \therefore \frac{t}{q} = \frac{2\pi r}{360} \therefore t = \frac{\pi\, qr}{180} \text{ किंवा } = \frac{q}{360} \times 2\pi r$$

§ 7·15 प्रश्न :

1. खालील रकान्यातील रिकाम्या जागा भरा :

	कंसाचे माप	त्रिज्या	कंसाची लांबी
1	30	5	...
2	60	7	...
3	75	10	...
4	120	4·2	...
5	150	2·5	...
6	90	24	...
7	150	6	...
8	...	1·5	2·4 π
9	72	...	2 π
10	108	...	9 π

2. एका भितीवरील घड्याळाच्या मिनिट काट्याची लांबी 8 सेमी आहे तर त्याचे टोक 7 मिनिटात किती अंतर जाईल ?

3. एका घड्याळाच्या मिनिट काट्याची लांबी 2·5 सेमी आहे. दुपारचे 12 वाजून 10 [illegible] 12 वा. 35 मिनिटे या अवधित मिनिट काट्याचे टोक किती अंतर कापील ? (π = 3·14)

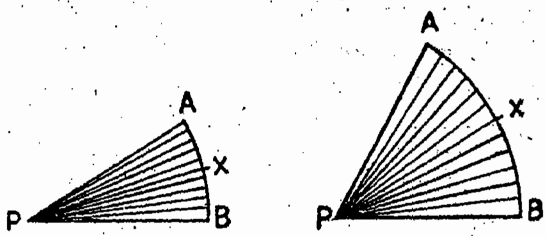
4. एका वर्तुळकंसाची लांबी त्याच्या त्रिज्येइतकीच आहे. तर कंसाचे माप काढा.

5. 10 सेमी त्रिज्येचे एक चाक ज्याचे माप 36 आहे असा कोन करून फिरते. (a) चाकावरील कोणताही बिंदू किती सेमी सरकेल? (b) केंद्रापासून 5 सेमी अंतरावरील बिंदू किती सेमी सरकेल?

§ 7·16 वर्तुळपाकळी आणि त्याचे क्षेत्रफळ :

वर्तुळपाकळी (sector) म्हणजे वर्तुळाच्या दोन त्रिज्या आणि त्या त्रिज्यांमधील कंसाने मर्यादित केलेला भाग असे स्थूलमानाने म्हणता येईल.

वर्तुळपाकळीमध्ये आ. 7·16 मधील छायांकित भागातील बिंदू असले पाहिजेत असे वाटते. यावरून व्यवस्थितपणे व्याख्या कशी करता येईल? संबंधित सर्व त्रिज्यांच्या संयोगाला आपण वर्तुळपाकळी म्हणू शकू काय?

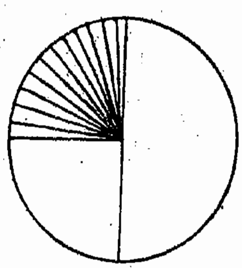


आ. 7·16

व्याख्या :

समजा कंस AXB एका वर्तुळाचा कंस आहे. त्याचा केंद्र P आणि त्रिज्या r आहे. जर कंस AXB वरील कोणताही बिंदू Q असेल तर रेख PQ अशा सर्व रेषाखंडांच्या संयोगाला वर्तुळपाकळी P–AXB असे म्हणतात. कंस AXB ला वर्तुळपाकळीचा कंस आणि r ला वर्तुळपाकळीची त्रिज्या म्हणतात.

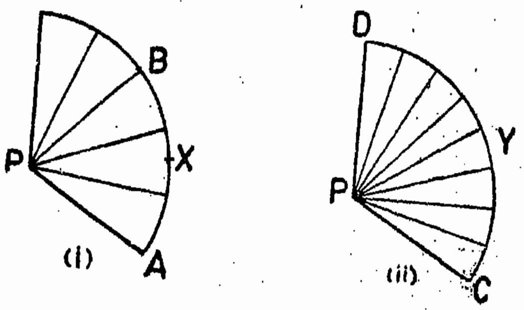
आपण यापूर्वी कंसाची लांबी कशी काढावी ते पाहिले. त्याचप्रमाणे आपण वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढू शकतो.



आ. 7·17

r त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ πr^2 या सूत्राने मिळते हे आपणास माहीत आहे. वर्तुळाच्या केंद्रीय कोनाचे माप 360 असते. त्याच त्रिज्येच्या अर्धवर्तुळाचे क्षेत्रफळ, वर्तुळाच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मे असते म्हणजेच अर्धवर्तुळाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}\pi r^2$ असते. तसेच त्याच्या केंद्रीय कोनाचे माप, वर्तुळाच्या केंद्रीय कोनाच्या मापाच्या निम्मे म्हणजे $360/2 = 180$ असते. तसेच वर्तुळाच्या $\frac{1}{4}$ भागाचे क्षेत्रफळ $\frac{1}{4}\pi r^2$ आणि त्याच्या केंद्रीय कोनाचे माप 90 असते (आ. 7·17 पाहा.).

बाजूच्या आ. 7·18 मधे आपण एकाच त्रिज्येच्या दोन एकरूप वर्तुळपाकळयांच्या कंसाना एकरूप कंसात विभागले आहे. आ. 7·18 (i) मधे वर्तुळपाकळीचे पाच एकरूप भाग केले आहेत तसेच आ. 7·18 (ii) मधे देखील वर्तुळपाकळीचे 8 एकरूप भाग केले आहेत. त्यामुळे वर्तुळपाकळयांना अनुक्रमे 5 आणि 8 एकरूप वर्तुळपाकळयात विभागले आहे. समजा, वर्तुळ-



आ. 7·18

पाकळीच्या प्रत्येक विभागाचे क्षेत्रफळ अनुक्रमे x_1 व x_2 आहे आणि त्याच्या केंद्रीय कोनाचे माप अनुक्रमे y_1 व y_2 आहे. म्हणून आ. 7·18 (i) चे क्षेत्रफळ $= 5x_1$ आणि त्याच्या केंद्रीय कोनाचे माप $= 5y_1$ तसेच आ. 7·18 (ii) चे क्षेत्रफळ $= 8x_2$ आणि त्याच्या कोनाचे माप $= 8y_2$ पण $5x_1 = 8x_2$ तसेच $5y_1 = 8y_2$ $\therefore \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$. यावरून वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या कंसाच्या मापाच्या प्रमाणात असते, असे सांगता येईल.

(याची सिद्धता क्लिष्ट असल्यामुळे येथे गाळण्यात येत आहे.)

आपण, वर्तुळास 360 माप असणाऱ्या कंसाची वर्तुळपाकळी समजू शकतो.

$$\therefore \frac{\text{वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ}}{\text{त्याच्या कंसाचे माप}} = \frac{\text{वर्तुळाचे क्षेत्रफळ}}{\text{त्याच्या कंसाचे माप}}$$

समजा, वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ A आणि त्याच्या कंसाचे, माप q आहे, तर $\frac{A}{q} = \frac{\pi r^2}{360}$

$$\therefore A = \frac{q}{360} \times \pi r^2$$

§ 7·17 प्रश्न :

1. खाली वर्तुळपाकळीच्या कंसाचे माप दिले आहे आणि त्याची त्रिज्या दिली आहे. त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

	वर्तुळपाकळीच्या कंसाचे माप	त्रिज्या		वर्तुळपाकळीच्या कंसाचे माप	त्रिज्या
(i)	90	10	(iv)	216	10
(ii)	72	10	(v)	324	10
(iii)	180	10	(vi)	72	4·2

2. खाली वर्तुळपाकळीची त्रिज्या आणि त्याचे क्षेत्रफळ दिले आहे. त्याच्या कंसाचे माप काढा.

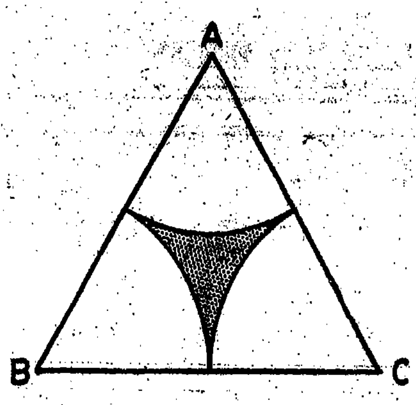
	त्रिज्या	क्षेत्रफळ		त्रिज्या	क्षेत्रफळ
(i)	2	π	(iii)	3·6	$2·16\pi$
(ii)	6	15π	(iv)	1·2	$0·6\pi$

3. वर्तुळपाकळीच्या कंसाची लांबी दिली आहे आणि त्याची त्रिज्या दिली आहे. वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढा :

[सूचना : वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ $= \frac{q}{360} \times \pi r^2 = \frac{q}{360} \times 2\pi r \times \frac{r}{2} = l\,(\text{कंस}) \times \frac{r}{2}$]

	वर्तुळपाकळीच्या कंसाची लांबी	त्रिज्या		वर्तुळपाकळीच्या कंसाची लांबी	त्रिज्या
(i)	20	12	(iv)	25	16
(ii)	35	20	(v)	5	20
(iii)	11	4	(vi)	r	r

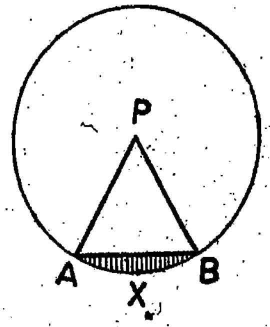
4.



आ. 7·19

एका समभुज त्रिकोणाची भुजा 30 सेमी आहे. त्याच्या प्रत्येक शिरोबिंदूला केंद्र मानून 15 सेमी त्रिज्येने वर्तुळपाकळ्या काढल्या. आ. 7·19 मधील छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा. ($\pi = 3.142$)

5. जर m (कंस A X B) = 60 आणि त्रिज्या r असेल तर वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ काढा आ. 7·20.

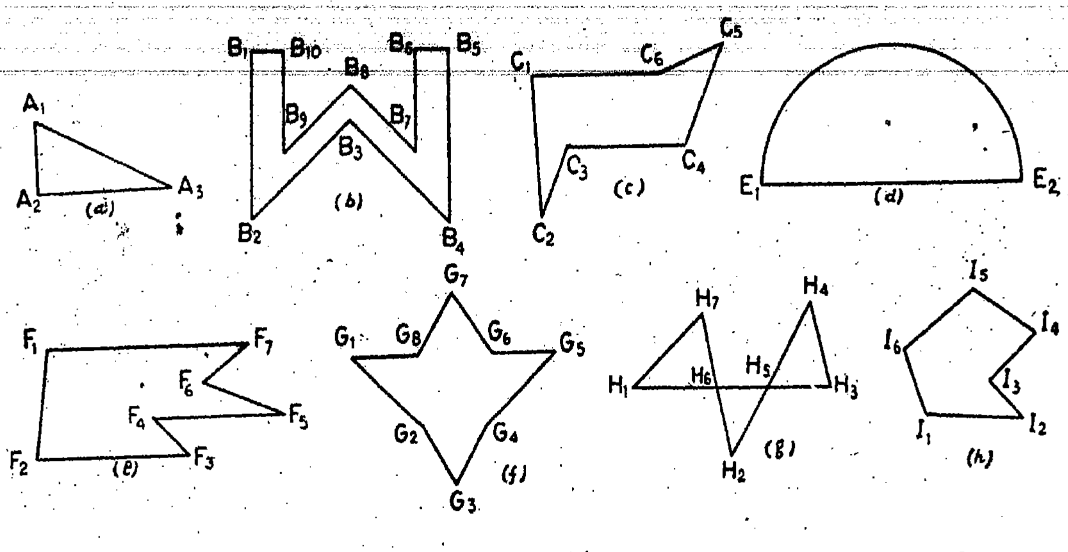


आ. 7·20

[सूचना : वर्तुळाचा कंस आणि जीवा यांनी बंदिस्त केलेल्या विभागाला वर्तुळखंड म्हणतात. वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ वर्तुळपाकळी P–A X B च्या क्षेत्रफळातून $\triangle PAB$ चे क्षेत्रफळ काढल्यास मिळेल.]

स्वाध्याय :

1. खालीलपैकी कोणत्या आकृती बहुभुजाकृती आहेत ? कोणत्या आकृती बहिर्वक्र बहुभुजाकृती आहेत ?



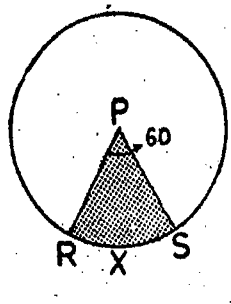
आ. 7·21

2. एक वर्तुळाची त्रिज्या 9 सेमी आहे आणि m (कंस RXS) = 60 तर आ. 7·22 च्या साहयाने खालील प्रश्नांची उत्तरे दया.

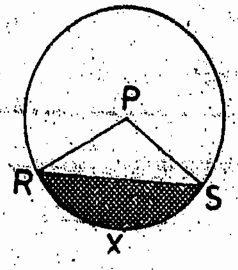
(i) छायांकित भागास काय म्हणतात

(ii) या छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

(iii) कंस RXS ची लांबी काढा.



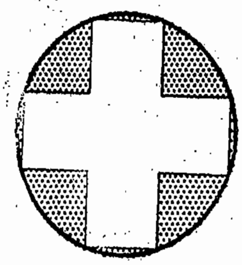
आ. 7·22

3. 

आ. 7·23

आ. 7·23 च्या मदतीने खालील प्रश्नांची उत्तरे दया.
$r = 12$ सेमी आणि m (कंस RXS) = 120
(i) वर्तुळाकृती क्षेत्राच्या छायांकित भागास काय म्हणतात ? (ii) P–RXS ह्या वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढा. (iii) $\triangle$ RSP चे क्षेत्रफळ काढा. [$\sqrt{3} \doteqdot 1{\cdot}73$] (iv) छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा. [$\pi \doteqdot 3{\cdot}14$]

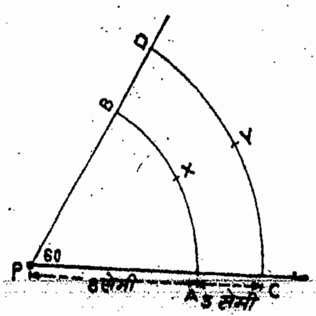
4. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे पाच चौरसांत विभाजित होणारी फुलीसारखी आकृती आहे. प्रत्येक चौरसाची भुजा 4 सेमी आहे. वर्तुळ आणि फुलीसारखी आकृती ह्यांच्यामधील भागाचे क्षेत्रफळ काढा (आ. 7·24).


आ. 7·24

5. एका गोलाची त्रिज्या 12 सेमी आहे. त्याच्या केंद्रापासून 6 सेमी आणि 5 सेमी अंतरावर असलेल्या प्रतलांनी छेद घेतले. ह्या छेदांमुळे मिळणाऱ्या वर्तुळांपैकी कोणते वर्तुळ मोठे असेल ?

6. जर कंस AXB चे माप 45 आणि त्याची त्रिज्या 12 सेमी असेल तर वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ काढा.

7. जर वर्तुळकंस AXB चे माप 45 आणि त्रिज्या 8 सेमी असेल तर क्षेत्रफळ काढा.

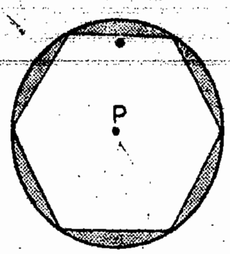


आ. 7·25

8. कंस AXB आणि कंस CYD या दोन्ही कंसांचे माप 60 आहे पण त्यांची लांबी समान नाही. P हा दोन्ही कंसांचा केंद्र आहे. जर l(PA) = 8 सेमी आणि l(AC) = 3 सेमी. तर कंस AXB आणि कंस CYD च्या लांबी काढा (आ. 7·25 पहा).

9. एका वर्तुळाकृती रस्त्याचे क्षेत्रफळ 22,176 चौमी आहे. जर रस्त्याचा बाहयव्यास 280 मीटर असेल तर रस्त्याची रुंदी काढा.

10. 10 सेमी त्रिज्येच्या वर्तुळात एक सुसम षट्कोन अंतर्लिखित केला आहे. आ. 7·26 मधील छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा.



आ. 7·26

प्रकरण 8 : भौमितिक रचना

§ 8·1 जमिनीचे भाग, इमारती, पूल इत्यादींचे नकाशे व आराखडे काढताना आपल्याला विविध भौमितिक आकृती विशिष्ट मोजमाप व प्रमाण घेऊन काढाव्या लागतात. ह्या आकृती काढणे म्हणजे एक प्रकारे भौमितिक रचना करणेच होय. अशा रचना करताना सामान्यतः सरळपट्टी, कंपास, कोनमापक, गुण्या ही कंपासपेटीतील तुमच्या परिचयाची साधने वापरली जातात. परंतु भूमितीमधे ज्यांना 'रचना' म्हणतात त्या करण्याकरता केवळ सरळपट्टी आणि कंपास ही दोनच साधने वापरतात.

दिलेल्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढणे, दिलेल्या कोनाचा दुभाजक काढणे, दिलेल्या रेषाखंडाचे काही एकरूप भाग करणे, दिलेल्या गोष्टींवरून त्रिकोण काढणे इत्यादी रचना तुम्ही यापूर्वी शिकला आहात. परंतु आता आपण शिकणार असलेल्या रचनांचे वैशिष्ट्य वेगळे आहे. केवळ सरळपट्टी आणि कंपासच्या साहाय्याने काही रचना कशा कराव्यात आणि या रचनांचे समर्थन कसे करावे हे आपल्याला आता शिकायचे आहे.

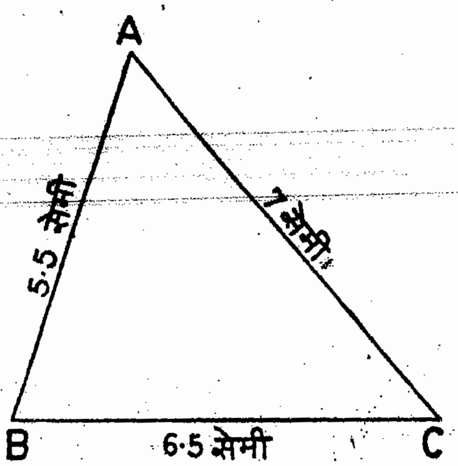
आकृती काढता येण्यासाठी काही किमान गोष्टी माहीत असणे आवश्यक आहे. एखादी रचना करा असे म्हटले जाईल तेव्हा आवश्यक त्या किमान गोष्टी दिलेल्या असतील. दिलेल्या गोष्टींवरून इष्ट ती रचना कशी करायची हा महत्त्वाचा मुद्दा आहे. उदाहरणांच्या साहाय्याने आपण हे समजून घेऊ.

उदा० 1 : $\triangle ABC$ मध्ये $l(BC) = 6{\cdot}5$ सेमी, $l(CA) = 7$ सेमी आणि $l(AB) = 5{\cdot}5$ सेमी; तर $\triangle$ ABC काढा.

येथे त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंची लांबी दिली असता त्रिकोण काढायचा आहे.

समजा त्रिकोणाची इष्ट ती आकृती काढली आहे. अशी आकृती घेऊन आपण या स्थितीचे विश्लेषण करू व रचना नेमकी कशी करावी हे समजण्यास त्याची कशी मदत होते हे पाहू.

विश्लेषण :



आ. 8·1

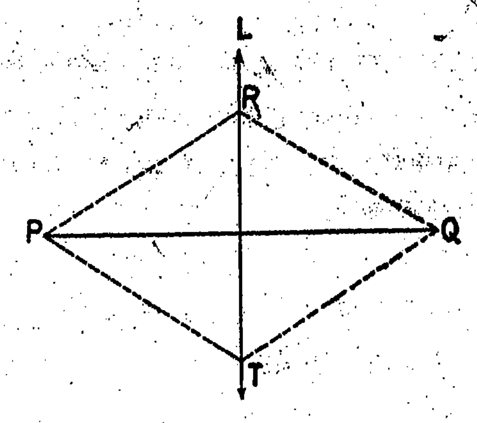
त्रिकोणाची आकृती मिळण्यासाठी प्रथम किती बिंदू निश्चित होणे आवश्यक आहे? अर्थात त्रिकोणाचे तीन शिरोबिंदू. आपण घेतलेल्या विशिष्ट उदाहरणात बिंदू A, बिंदू B आणि बिंदू C यांचे स्थान निश्चित झाले की $\triangle$ABC काढता येईल. $\triangle$ABC च्या तिन्ही बाजूंच्या लांबींपैकी कुठल्याही एका बाजूच्या लांबीइतका रेषाखंड घेतल्याने आपल्याला दोन शिरोबिंदू मिळतील. रेख BC ची लांबी 6·5 सेमी म्हणून 6·5 सेमी लांबीचा रेख BC घेतल्याने बिंदू B व बिंदू C हे त्रिकोणाचे दोन शिरोबिंदू मिळतील. आता, रेख CA ची लांबी 7 सेमी आहे. यावरून बिंदू A हा बिंदू C पासून 7 सेमी अंतरावर आहे हे कळते. दिलेल्या एका बिंदूपासून दिलेल्या अंतरावर असणारे सर्व बिंदू कुठे असतात? दिलेल्या बिंदूस केंद्र मानून दिलेल्या अंतराइतक्या त्रिज्येने काढलेल्या वर्तुळावर असे बिंदू असतात हे आपण जाणतो. म्हणून बिंदू A हा बिंदू C केंद्र घेऊन 7 सेमी त्रिज्येने काढलेल्या वर्तुळावर असेल. तसेच बिंदू A हा, बिंदू B पासून 5·5 सेमी अंतरावर आहे; कारण $l(AB) = 5{\cdot}5$ सेमी हे दिले आहे. म्हणून बिंदू A हा बिंदू B केंद्र घेऊन 5·5 सेमी त्रिज्येने काढलेल्या वर्तुळावर असेल. आता बिंदू C पासून 7 सेमी आणि बिंदू B पासून 5·5 सेमी अंतरावर असलेला बिंदू A कसा मिळवता येईल?

$\triangle$ ABC ची रचना करण्यासाठी नेमके काय करावे हे वरील चर्चेवरून तुमच्या लक्षात आले असेलच. आता $\triangle$ ABC काढा व रचना थोडक्यात लिहा.

उदा० 2 : दिलेल्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढणे.

रेख PQ ची लांबी 7·5 सेमी आहे. या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढा.

समजा आकृती 8·2 मधे दिल्याप्रमाणे रेख PQ चा लंबदुभाजक रेषा L आहे.



आ. 8·2

विश्लेषण :

कोणतीही एक रेषा काढता येण्यासाठी किमान किती बिंदू लागतील ? दोन भिन्न बिंदू मिळाले की त्यांच्यातून जाणारी नेमकी एक रेषा निश्चित होते, हे आपल्याला माहीत आहे. अर्थात दिलेल्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढता येण्यासाठी दोन विशिष्ट असे भिन्न बिंदू मिळवावे लागतील. दिलेल्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक असणारी रेषा L काढली आहे असे समजू. रेषा L वरील एक बिंदू R घ्या. या बिंदूचे, बिंदू P आणि बिंदू Q पासूनचे अंतर यात काय संबंध असला पाहिजे ? का ? बिंदू P आणि बिंदू Q पासून समदूर असलेला हा बिंदू R, कसा मिळविता येईल ? काही एक त्रिज्या घेऊन बिंदू P आणि बिंदू Q ही केंद्रे घेऊन दोन कंस काढले की त्यांचा छेद म्हणजे बिंदू P व बिंदू Q पासून समदूर असणारा बिंदू R मिळेल. याच पद्धतीने आणखी एक बिंदू T मिळवता येईल. T बिंदू मिळवण्याकरता पुन्हा निराळी त्रिज्या घेण्याची गरज आहे काय ? त्रिज्या पुरेशी मोठी घेतली तर P आणि Q या बिंदूंना केंद्र मानून काढलेली दोन वर्तुळे दोन बिंदूंत छेदू शकतात. म्हणजे एकाच वेळी R आणि T हे दोन्ही बिंदू मिळतात.

(त्रिज्या पुरेशी मोठी म्हणजे किती घेतली पाहिजे ?)

आता दिलेल्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढण्यासाठी काय केले पाहिजे हे तुमच्या लक्षांत आले असेल. रेख PQ घेऊन त्याचा लंबदुभाजक काढा व रचना लिहा.

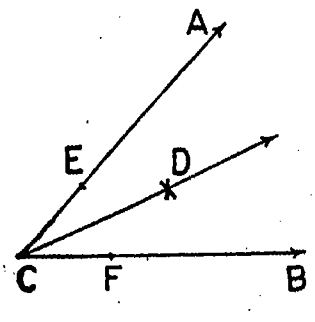
वरील रचना करताना आपण दिलेल्या रेषाखंडाचा मध्यबिंदू मिळवण्याची पद्धतही शिकलो हे लक्षात घ्या.

उदा० 3 : दिलेल्या कोनाचा दुभाजक काढणे.

ज्याचे माप 65 आहे असा ∠ACB दिला आहे. या कोनाचा दुभाजक काढा. येथे इष्ट ती रचना करण्यात आली आहे असे मानून विश्लेषण न करता सरळ रचना देऊ.

रचना :

∠ACB हा दिलेला 65 मापाचा कोन आहे. बिंदू C केंद्र घेऊन काही एक त्रिज्येने एक कंस असा काढा की तो किरण CA आणि किरण CB यांना अनुक्रमे बिंदू E आणि बिंदू F मधे छेदील.



आ. 8·3

बिंदू E केंद्र कल्पून योग्य त्रिज्येने ∠ACB च्या अंतर्भागात एक कंस काढा. बिंदू F केंद्र मानून त्याच त्रिज्येने एक कंस असा काढा की तो यापूर्वी काढलेल्या कंसाला बिंदू D मधे छेदील.

किरण CD काढा. किरण CD हा ∠ACB चा दुभाजक असेल (आ. 8·3).

आता आपण केलेल्या रचनेचे समर्थन करून किरण CD हा वास्तविक ∠ACB चा दुभाजक आहे हे दाखवणे आवश्यक आहे.

समर्थन :

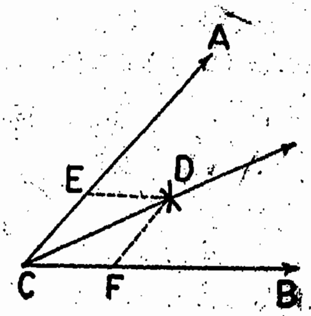
बिंदू D व E आणि बिंदू D व F यांना जोडा (आ. 8·4).

$\triangle$CED आणि $\triangle$CFD मधे रेख CE $\cong$ रेख CF, रेख ED $\cong$ रेख FD, आणि रेख CD समाईक.

$\therefore$ बाबाबा गृहीतकानुसार $\triangle$CED $\cong$ $\triangle$CFD

$\therefore$ $\angle$ECD $\cong$ $\angle$FCD.

$\therefore$ किरण CD हा $\angle$ACB चा दुभाजक आहे.



आ. 8·4

वर चर्चिलेल्या उदाहरणांवरून तुमच्या हे लक्षात आले असेल की रचना करण्याची पद्धत शोधून काढण्यासाठी आपण इष्ट ती रचना करण्यात आली आहे असे गृहीत धरून एक नमुना आकृती काढतो. या आकृतीत दिलेल्या सर्व गोष्टींचा उल्लेख करतो आणि अशा आकृतीवरून रचना करण्यास उपयुक्त ठरणाऱ्या गुणधर्मांचा शोध घेतो. यासच आपण 'विश्लेषण' म्हटले आहे.

पहिल्या दोन उदाहरणांत आपण याच पद्धतीचा अवलंब केला आहे. तिसऱ्या उदाहरणात मात्र ही पद्धती न वापरता आपण सरळ रचना दिली आहे. पण त्यामुळे येथे सिद्धता देऊन आपण केलेली रचना म्हणजेच इष्ट ती रचना होय असे समर्थन करणे आवश्यक ठरले.

विश्लेषण हे एक प्रकारचे रचनेचे समर्थनच होय. म्हणून विश्लेषण करून दाखवले तर पुन्हा सिद्धतेच्या साहाय्याने रचनेचे निराळे समर्थन करण्याची फारशी गरज उरत नाही. मात्र आधी विश्लेषण न देता सरळ रचना सांगितली तर रचनेचे यथायोग्य समर्थन करणे आवश्यक ठरते.

इष्ट ती रचना करण्याची पद्धत शोधून काढण्यासाठी विश्लेषण पद्धतीचा फार उपयोग होतो. म्हणून विश्लेषण पद्धती वापरण्याचा तुम्हांला सराव झाला पाहिजे.

आता आपण दोन्ही पद्धतींचा वापर करून काही रचना शिकू.

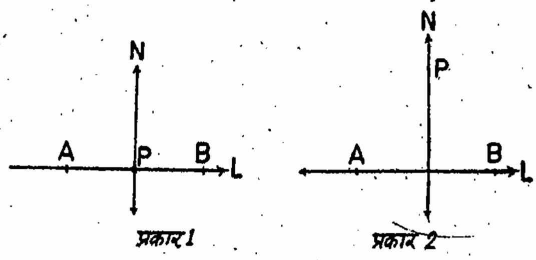
§ 8·2 रचना :

दिलेल्या बिंदूतून दिलेल्या रेषेवर लंब काढणे.

या बाबतीत दोन पर्याय संभवतात : (i) ज्या बिंदूतून दिलेल्या रेषेवर लंब काढायचा तो बिंदू दिलेल्या रेषेवर असणे. (ii) ज्या बिंदूतून दिलेल्या रेषेवर लंब काढायचा तो बिंदू दिलेल्या रेषेच्या बाहेर असणे.

दोन्ही पर्यायांतील रचना पुष्कळशी सारखीच असल्यामुळे आपण त्यांचा एकत्र विचार करू.

कोणत्याही रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू हा त्या रेषाखंडाच्या दोन्ही अंत्यबिंदूंपासून समान अंतरावर असतो हे तुम्हाला माहीत आहे. दिलेल्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक तुम्हांला काढता येतो. या गोष्टीचा उपयोग करून दिलेल्या बिंदूतून दिलेल्या रेषेवर लंब काढता येईल का? खालील विश्लेषण लक्षात घ्या.



आ. 8·5

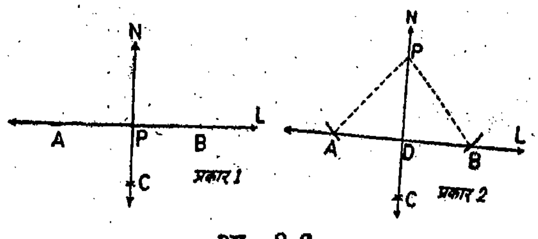
विश्लेषण :

समजा L ही दिलेली रेषा असून P हा दिलेला बिंदू आहे (आ. 8·5 पाहा). प्रकार 1 मधे

बिंदू P हा रेषा L वर घेतला आहे; तर प्रकार 2 मधे बिंदू P हा रेषा L च्या बाहेर घेतला आहे. दोन्ही स्थितींत बिंदू P मधून जाणारी रेषा N ही, रेषा L वर लंब आहे असे समजा. आता रेषा N ही, रेषा L मधे समाविष्ट असणाऱ्या एखादया रेषाखंडाचा लंबदुभाजक होईल असा रेषाखंड आपल्याला मिळवता येईल का? समजा रेषा L मधे समाविष्ट असणारा असा एक रेषाखंड AB आपण मिळवला. या स्थितीत बिंदू P हा, रेख AB चा अंत्यबिंदू A आणि B पासून समदूर असेल. आता बिंदू A आणि B पासून समदूर असलेला आणखी एक बिंदू C मिळवला तर रेख AB चा लंबदुभाजक काढता येईल. अशा रीतीने काढलेला रेख AB चा लंबदुभाजक हा रेषा L वर लंब असेल व तो P मधून जाईल.

रचना :

बिंदू P केंद्र घेऊन योग्य त्रिज्येने एक कंस असा काढा की तो रेषा L ला दोन भिन्न बिंदू A आणि B मधे छेदील.



आ. 8·6

आता बिंदू A आणि B केंद्र घेऊन योग्य त्रिज्येने दोन कंस असे काढा की ते परस्परांना C बिंदूत छेदतील. (यासाठी घ्यावयाची त्रिज्या ही रेख AB च्या लांबीच्या निम्म्यापेक्षा जास्त असली पाहिजे हे तुमच्या लक्षात येईल.) बिंदू P व बिंदू C मधून जाणारी रेषा N काढा.

रेषा PC ही, रेख AB चा लंबदुभाजक आहे; आणि म्हणून ती, बिंदू P मधून रेषा L वर काढलेली इष्ट अशी लंबरेषा आहे हे उघड आहे.

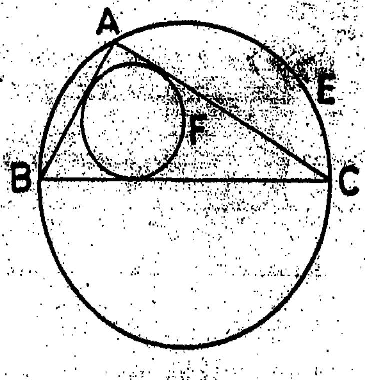
§ 8·3 प्रश्न :

1. 13·5 सेमी लांबीचा एक रेषाखंड PQ घ्या. या रेषाखंडावर एक बिंदू R असा घ्या की $l(RQ) = 6{\cdot}7$ सेमी. बिंदू R मधून रेषा RS अशी काढा की ती रेषा PQ वर लंब असेल.
2. $\triangle ABC$ असा काढा की $l(AB) = 9$ सेमी, $l(BC) = 6$ सेमी आणि $l(CA) = 9$ सेमी. बिंदू A मधून रेख BC वर लंब असणारी रेषा अशी काढा की ती रेख BC ला D बिंदूत छेदील. रेख BD आणि रेख CD ची लांबी मोजा.
3. ज्याच्या बाजूची लांबी 6 सेमी आहे असा एक समभुज त्रिकोण काढा. त्रिकोणाच्या प्रत्येक शिरोबिंदूतून समोरील बाजूवर लंब काढा. लंबरेषा एकमेकींना किती बिंदूंत छेदतात?
4. $\triangle ABC$ असा काढा की, $l(AB) = 7$ सेमी, $l(BC) = 8{\cdot}5$ सेमी आणि $m\angle B = 120$. शिरोबिंदू A मधून बाजू BC वर लंब काढा.
5. समभुज चौकोन ABCD असा काढा की, $l(AB) = 7$ सेमी आणि $m\angle B = 60$. कर्ण AC च्या मध्यबिंदू M मधून या कर्णावर लंब असणारी रेषा काढा. ही रेषा बिंदू B आणि D मधून जाते का?
6. बिंदू P केंद्र घेऊन 4 सेमी त्रिज्येने एक वर्तुळ काढा. वर्तुळावर एक बिंदू A घ्या. वर्तुळावर दुसरा एक बिंदू B असा घ्या की रेख AB ची लांबी वर्तुळाच्या त्रिज्येइतकी होईल. रेख AB चा लंब-दुभाजक काढा व हा लंबदुभाजक वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूतून जातो याचा पडताळा घ्या.

§ 8·4 त्रिकोणाचे परिवर्तुळ आणि आंतरवर्तुळ :

त्रिकोणाचे परिवर्तुळ तसेच आंतरवर्तुळ म्हणजे काय हे तुम्ही या पूर्वी अभ्यासले आहे. बाजूच्या आकृतीत कोणते वर्तुळ △ ABC चे परिवर्तुळ आहे आणि कोणते आंतरवर्तुळ आहे हे सांगा. त्रिकोणाचे परिवर्तुळ आणि आंतरवर्तुळ यांच्या केंद्रबिंदूंना आपण काय म्हणतो ?

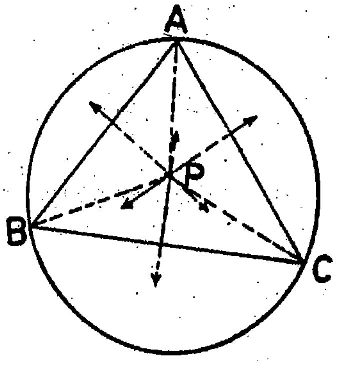
आता आपण दिलेल्या त्रिकोणाचे परिवर्तुळ आणि आंतरवर्तुळ कसे काढायचे हे पाहू.



आ. 8·7

§ 8·5 दिलेल्या त्रिकोणाचे परिवर्तुळ काढणे :

विश्लेषण :



आ. 8·8

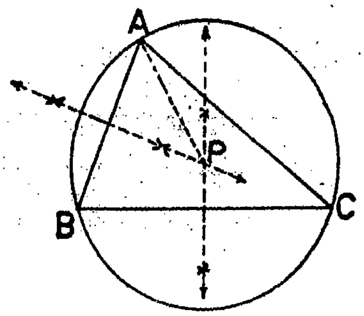
बाजूची आकृती 8·8 पाहा. या आकृतीत △ ABC चे परिवर्तुळ काढलेले दाखवले आहे.

समजा बिंदू P हा, या वर्तुळाचे केंद्र आहे. हे वर्तुळ △ ABC चे परिवर्तुळ आहे. म्हणून ते त्रिकोणाचे शिरोबिंदू A, B आणि C मधून जाते. l(PA), l(PB) आणि l(PC) यांत काय संबंध असला पाहिजे ? बाजू BC चे अंत्यबिंदू B आणि C पासून समदूर असलेला बिंदू P हा कोणत्या रेषेवर असला पाहिजे ? तसेच बाजू AB चे अंत्यबिंदू A आणि B पासून समदूर असलेला P बिंदू कोणत्या रेषेवर असला पाहिजे ? यावरून दिलेल्या त्रिकोणाच्या परिवर्तुळाचा केंद्रबिंदू कसा मिळवावा हे लक्षात येते. केंद्रबिंदू मिळाल्यानंतर कोणत्या त्रिज्येने वर्तुळ काढले असता ते त्रिकोणाचे परिवर्तुळ होईल हेही सहज लक्षात येते.

आता खालील रचना पाहा.

रचना :

△ ABC च्या बाजू BC आणि AB चे लंबदुभाजक काढा. समजा हे लंबदुभाजक एकमेकांना P बिंदूत छेदतात. बिंदू P केंद्र घेऊन l(PA) इतक्या त्रिज्येने वर्तुळ काढा. हे वर्तुळ △ ABC चे परिवर्तुळ होईल.



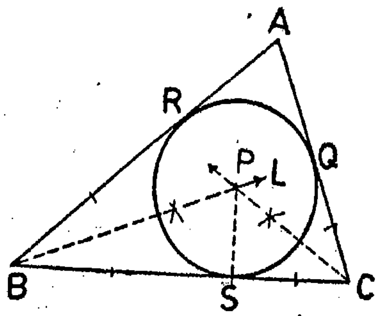
आ. 8·9

§ 8·6 दिलेल्या त्रिकोणाचे आंतरवर्तुळ काढणे :

येथे आपण सरळ रचना देऊन मग त्याचे समर्थन करू.

रचना :

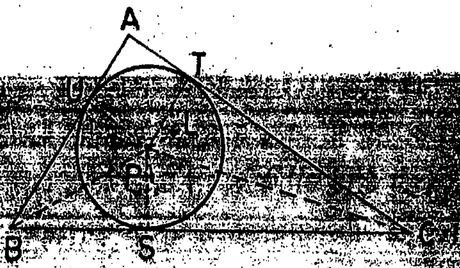
∠B आणि ∠C चे दुभाजक काढा. समजा हे कोनदुभाजक एकमेकांना P बिंदूत छेदतात. बिंदू P मधून बाजू BC वर लंब काढा. समजा या लंबाचा, बाजू BC वरील लंबपाद S आहे. आता बिंदू P केंद्र घेऊन l(PS) इतक्या त्रिज्येने वर्तुळ काढा. हे वर्तुळ △ ABC चे आंतरवर्तुळ होईल.



आ. 8·10

समर्थन :

बिंदू P हा $\angle B$ च्या दुभाजकावर आहे. म्हणून तो बाजू AB आणि बाजू BC पासून समदूर आहे. तसेच बिंदू P हा $\angle C$ च्या दुभाजकावर आहे. म्हणून तो बाजू BC आणि बाजू CA पासून समदूर आहे. अर्थात बिंदू P हा त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूपासून समदूर आहे. बिंदू P चे सर्व बाजूपासूनचे अंतर $= l(PS)$. बिंदू P मधून बाजू CA आणि बाजू AB वर काढलेल्या लंबांचे पाद अनुक्रमे बिंदू T व U असतील तर $l(PT) = l(PU) = l(PS)$. म्हणून बिंदू P केंद्र घेऊन $l(PS)$ त्रिज्येने काढलेले वर्तुळ हे $\triangle ABC$ च्या बाजू BC, CA आणि AB यांना बिंदू S, T आणि U मधे स्पर्श करते.



आ. 8·11

§ 8·7 प्रश्न :

1. एका समभुज त्रिकोणाच्या बाजूची लांबी 5·5 सेमी आहे. या त्रिकोणाचे परिवर्तुळ काढा. रचना लिहा.
2. $\triangle ABC$ मधे $l(AB) = 8$ सेमी, $l(BC) = 5$ सेमी आणि $l(CA) = 8$ सेमी. या त्रिकोणाचे परिवर्तुळ काढा आणि वर्तुळाची त्रिज्या मोजा.
3. ज्याच्या बाजूची लांबी 6 सेमी आहे अशा समभुज त्रिकोणाच्या सर्व बाजूंना आतून स्पर्श करील असे वर्तुळ काढा. रचना लिहा.
4. $\triangle PQR$ मधे $l(PQ) = 6$ सेमी, $l(QR) = 8$ सेमी आणि $m\angle Q = 120$. त्रिकोणाच्या सर्व शिरोबिंदूतून जाणारे वर्तुळ काढा. वर्तुळाच्या त्रिज्येची लांबी मोजा. वर्तुळाचे केंद्र नेमके कुठे आहे?
5. $\triangle ABC$ मधे $l(AB) = 6$ सेमी, $l(BC) = 8$ सेमी आणि $m\angle B = 135$. या त्रिकोणाचे आंतरवर्तुळ काढा.
6. $\triangle RST$ काढा जेव्हा $l(RS) = 7$ सेमी, $l(ST) = 8$ सेमी आणि $l(TR) = 6$ सेमी. एकाच आकृतीत या त्रिकोणाचे परिवर्तुळ आणि आंतरवर्तुळ काढा.
7. एका चौरसाच्या बाजूची लांबी 6 सेमी आहे. या चौरसाचे दोन्ही कर्ण काढल्यामुळे एक समाईक शिरोबिंदू असणारे जे चार त्रिकोण तयार होतात त्यांची आंतरवर्तुळे काढा.
8. आयत ABCD ची लांबी AB आणि रुंदी AD या अनुक्रमे 10 सेमी आणि 5·5 सेमी आहेत. आयताची रचना करून कर्ण AC काढा. $\triangle ABC$ चे परिवर्तुळ काढा. वर्तुळाचे केंद्र नेमके कुठे आहे? बिंदू D हा वर्तुळावर आहे याची खात्री करून घ्या.
9. समभुज त्रिकोण ABC मधे $l(AB) = 6·5$ सेमी. एकाच आकृतीत या त्रिकोणाचे परिवर्तुळ आणि आंतरवर्तुळ काढा. आंतरवर्तुळ आणि परिवर्तुळ यांच्या त्रिज्यांचे गुणोत्तर काढा.
10. $\triangle PQR$ मधे $l(PQ) = l(PR) = 7$ सेमी आणि $l(QR) = 4·5$ सेमी. या त्रिकोणाचे परिवर्तुळ काढा. वर्तुळाचे केंद्र $\angle P$ च्या दुभाजकावर असल्याची खात्री करून घ्या.

§ 8·8 वर्तुळाच्या स्पर्शिका :

वर्तुळाची स्पर्शिका म्हणजे काय? प्रकरण 4 मध्ये दिलेली व्याख्या आठवा.

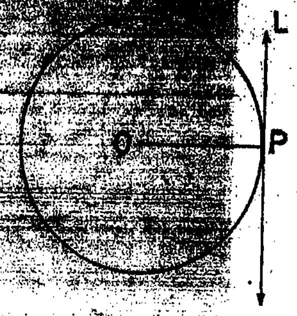
समजा दिलेल्या बिंदूतून एका वर्तुळाच्या स्पर्शिका काढायच्या आहेत. याबाबतीत दोन पर्याय संभवतात.

(i) दिलेला बिंदू वर्तुळावर असणे (ii) दिलेला बिंदू वर्तुळाच्या बाहेर असणे.

जर दिलेला बिंदू वर्तुळाच्या अंतर्भागात असेल तर त्या बिंदूतून जाणारी वर्तुळाची स्पर्शिका असणारी रेषा काढता येत नाही हे आपणास माहीत आहे.

§ 8.9 वर्तुळावरील दिलेल्या बिंदूपाशी वर्तुळाची स्पर्शिका काढणे :

समजा O केंद्र असलेल्या वर्तुळावर P बिंदू दिला आहे.



आ. 8·12

विश्लेषण :

समजा रेषा L ही, बिंदू P पाशी काढलेली वर्तुळाची स्पर्शिका आहे. ही स्पर्शिका O आणि P बिंदूंना सांधणाऱ्या त्रिज्येशी किती मापाचा कोन करील ? यावरून इष्ट ती स्पर्शिका काढण्याची रीत तुमच्या सहज लक्षात येईल.

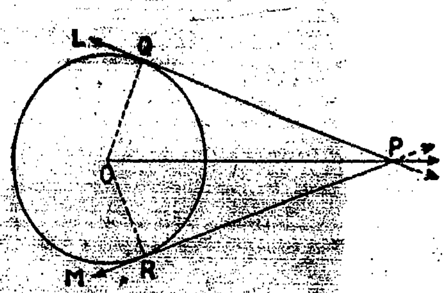
स्पर्शबिंदू P आणि वर्तुळाचे केंद्र O यांना सांधून OP या त्रिज्येला P बिंदूतून लंब असणारी रेषा काढली म्हणजे झाले. दिलेल्या रेषाखंडावरील बिंदूतून त्या रेषाखंडावर लंब कसा काढावा हे तुम्हांला माहीत आहेच.

आता 3·5 सेमी त्रिज्येने एक वर्तुळ काढून वर्तुळावर कुठेही एक बिंदू घ्या. या बिंदूतून वर्तुळाची स्पर्शिका काढा. रचना लिहा.

§ 8·10 वर्तुळाबाहेरील बिंदूतून वर्तुळाच्या स्पर्शिका काढणे :

समजा O केंद्र असलेल्या वर्तुळाबाहेर एक बिंदू P दिला आहे.

अशा स्थितीत दोन स्पर्शिका संभवतात हे तुम्हांला माहीत आहे.



आ. 8·13

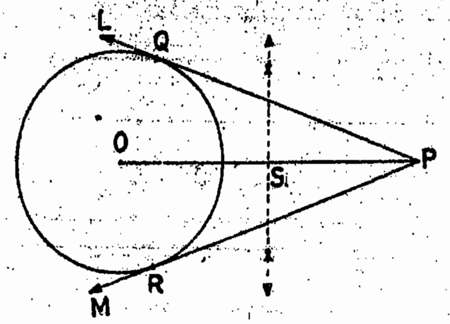
विश्लेषण :

समजा रेषा L आणि रेषा M इष्ट स्पर्शिका असून त्या वर्तुळाला बिंदू Q आणि बिंदू R पाशी स्पर्श करतात. स्पर्शिका L ही, त्रिज्या OQ शी कोणता कोन करील ? का ?

आता रेख OP समोर स्पर्शबिंदू Q वर काटकोन होतो. अर्धवर्तुळातील कोन काटकोन असतो या ज्ञानाचा उपयोग करून आपल्याला बिंदू Q कसा मिळवता येईल ? ज्याचा व्यास रेख OP आहे असे अर्धवर्तुळ काढण्यासाठी प्रथम आपल्याला रेख OP चा मध्यबिंदू मिळवावा लागेल. यासाठी रेख OP ची काटकोनात दुभागणी करावी लागेल. दिलेल्या रेषाखंडाची काटकोनात दुभागणी कशी करावी हे आपल्याला माहीत आहे. रेख OP चा मध्यबिंदू केंद्र घेऊन $\frac{1}{2}\, l\,(OP)$ त्रिज्येने काढलेले अर्धवर्तुळ दिलेल्या वर्तुळास ज्या बिंदूत छेदील तो बिंदू म्हणजेच बिंदू Q असेल. याच पद्धतीने दुसरा बिंदू R मिळवता येईल. वास्तविक अर्धवर्तुळ काढण्याऐवजी संपूर्ण वर्तुळ काढले तर हे वर्तुळ दिलेल्या वर्तुळास रेख OP च्या विरुद्ध बाजूंना दोन बिंदूंत छेदील आणि अशा रीतीने आपल्याला हवे असलेले दोन्ही बिंदू Q व R एकाच वेळी मिळतील. आता बिंदू P व Q आणि बिंदू P व R सांधले असता इष्ट स्पर्शिका मिळतील.

रचना :

बिंदू O केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या बाहेर बिंदू P दिला आहे.



आ. 8·14

(1) OP सांधा. (2) या रेषाखंडाचा मध्यबिंदू S मिळवा. (3) बिंदू S केंद्र घेऊन रेख SO किंवा रेख SP च्या लांबीइतक्या त्रिज्येने एक वर्तुळ मूळ वर्तुळास बिंदू Q व बिंदू R मध्ये छेदील असे काढा. (4) बिंदू P व Q तसेच बिंदू P व R मधून जाणाऱ्या रेषा L व M काढा.

रेषा L व रेषा M इष्ट स्पर्शिका होत.

काही विशिष्ट परिस्थितीत वर सांगितलेल्या पद्धतीपेक्षा सोप्या पद्धतीने इष्ट स्पर्शिका काढता येतात. खालील उदाहरण पाहा.

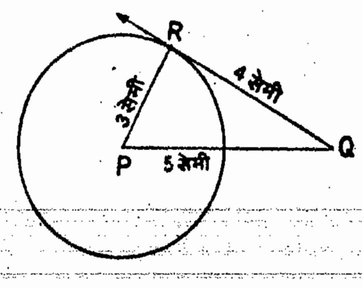
§ 8·11 बिंदू P केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या त्रिज्येची लांबी 3 सेमी आहे. केंद्र बिंदूपासून 5 सेमी अंतरावर असलेल्या Q बिंदूतून वर्तुळाच्या स्पर्शिका काढा.

विश्लेषण :

समजा वर्तुळाबाहेरील Q बिंदूतून काढलेली स्पर्शिका वर्तुळास R बिंदूत स्पर्श करते. $\triangle RPQ$ हा काटकोन त्रिकोण असेल.

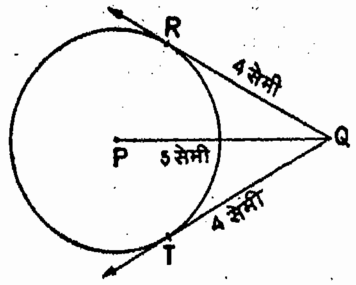
पायथॅगोरसच्या प्रमेयानुसार,

$$\{l(QR)\}^2 = \{l(PQ)\}^2 - \{l(PR)\}^2$$
$$= (5)^2 - (3)^2 = 25 - 9 = 16$$
$$\therefore l(QR) = 4$$



आ. 8·15

रचना :



आ. 8·16

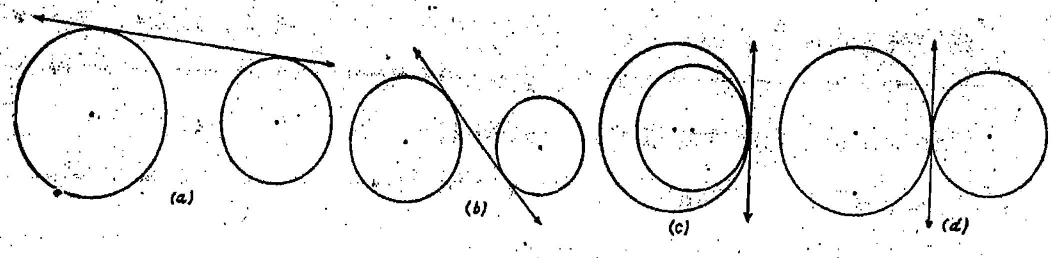
बिंदू Q केंद्र घेऊन 4 सेमी त्रिज्येने असा कंस काढा की तो वर्तुळास R व T बिंदूंत छेदील. QR व QT रेषा काढा. रेषा QR व रेषा QT इष्ट स्पर्शिका असतील.

वर्तुळाबाहेरील दिलेल्या बिंदूपासून स्पर्शबिंदूचे अंतर वरीलप्रमाणे पूर्णांकात किंवा परिमेय संख्येत येते तेव्हा वरील पद्धतीचा उपयोग करून स्पर्शिका काढता येईल.

§ 8·12 एका प्रतलातील दोन वर्तुळांच्या समाईक स्पर्शिका :

एका प्रतलात दोन वर्तुळे काढल्यास किती निरनिराळे प्रकार संभवतात हे तुम्ही प्रकरण 4 मध्ये पाहिले आहे. प्रकरण 4 मधील संबधित आकृती परत पाहा.

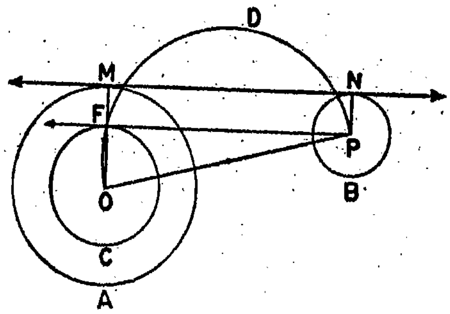
एका प्रतलातील दोन वर्तुळांच्या समाईक स्पर्शिका म्हणजे काय ते तुम्हाला माहीत आहे. पुढील आकृती पाहा.



आ. 8·17

आकृती (a) मधील स्पर्शिकेस कोणती स्पर्शिका म्हणतात? अशा किती स्पर्शिका संभवतात?
आकृती (b) मधील स्पर्शिकेस कोणते विशेष नाव आहे? अशा किती स्पर्शिका काढता येतात?
आकृती (c) व (d) मधे प्रत्येकी फक्त एक स्पर्शिका दाखवली आहे. प्रत्येक बाबतीत किती समाईक स्पर्शिका काढता येतात?

§ 8·13 एका प्रतलातील दोन वर्तुळांच्या समाईक बाह्यस्पर्शिका काढणे. विश्लेषण :



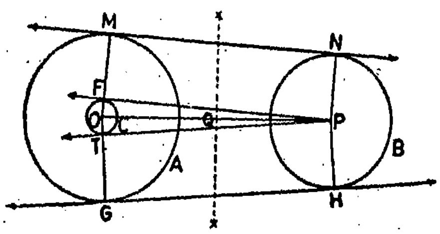
आ. 8·18

समजा एकाच प्रतलात बिंदू O आणि P केंद्र असलेली दोन वर्तुळें A आणि B आहेत आणि A ची त्रिज्या, a असून वर्तुळ B ची त्रिज्या, b आहे. $a > b$ असे मानू. रेषा MN ही या दोन वर्तुळांची एक समाईक बाह्यस्पर्शिका घेऊ. रेषा MN स्पर्शिका असल्यामुळे रेख OM $\perp$ रेषा MN. तसेच रेख PN $\perp$ रेषा MN. बिंदू P मधून रेषा PF $\parallel$ रेषा MN घेतली तर आकृती FPNM आयत होईल. म्हणून रेख OF$\perp$ रेषा PF. $l(OF) = l(OM) - l(FM) = l(OM) - l(NP) = a - b$. अर्थात बिंदू O, केंद्र घेऊन $a-b$ त्रिज्येने काढलेल्या वर्तुळाची रेषा PF ही स्पर्शिका होइल.

वर्तुळे A व B दिली आहेत. त्यांच्या त्रिज्या a व b असून $a > b$. वर्तुळ A चे केंद्र O यास केंद्र घेऊन $a-b$ त्रिज्येचे वर्तुळ काढता येईल. बिंदू P मधून या वर्तुळाची स्पर्शिका काढून बिंदू F मिळवता येईल. बिंदू O व F यांना सांधून काढलेली रेषा वर्तुळ A ला ज्या बिंदूत छेदील तो बिंदू M असेल. बिंदू P मधून रेख OM ला समांतर काढलेली रेषा वर्तुळ B ला ज्या बिंदूत छेदील तो बिंदू N असेल. बिंदू M व N मधून जाणारी रेषा वर्तुळ A व B ची समाईक बाह्यस्पर्शिका होईल. याच रीतीने दुसरी समाईक बाह्यस्पर्शिका काढता येईल. आता खालील रचना पाहा.

रचना :

बिंदू O व P केंद्र असलेली दोन वर्तुळे A व B दिली आहेत. त्यांच्या त्रिज्या a व b असून $a > b$.



आ. 8·19

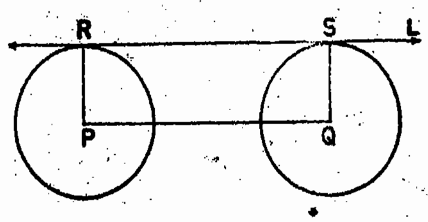
(1) बिंदू O केंद्र घेऊन $a-b$ त्रिज्येने वर्तुळ C काढा. (2) रेख OP चा मध्यबिंदू Q मिळवा. (3) बिंदू Q केंद्र घेऊन $l(\mathring{Q}P)$ इतक्या त्रिज्येने वर्तुळ D काढा. हे वर्तुळ, वर्तुळ C ला ज्या बिंदूत छेदते त्यांना F व T नावे दया. P, F व P, T सांधा. (4) रेषा OF व OT काढा. या रेषा वर्तुळ A ला ज्या बिंदूत छेदतात त्यांची नावे M व G दया.

(5) बिंदू P मधून रेख PN ⊥ रेख PF आणि रेख PH ⊥ रेख PT काढा. रेख PN व रेख PH वर्तुळ B ला बिंदू N व H मधे छेदतात असे समजा. (6) रेषा MN अणि रेषा GH काढा. रेषा MN आणि रेषा GH इष्ट स्पर्शिका होत.

वरील रचनेत आपण $a > b$ घेतले आहे. $b > a$ असेल तर रचना वरीलप्रमाणेच करता येईल. पण $a = b$ असेल तर ? मग $a - b = 0$ येईल. शून्य त्रिज्येने वर्तुळ कसे काढणार ? आणि मग समाईक स्पर्शिका कशा काढणार ?

§ 8·14 एका प्रतलातील समान त्रिज्येच्या दोन वर्तुळांना समाईक बाह्यस्पर्शिका काढणे :

विश्लेषण :



आ. 8·20

समजा P आणि Q केंद्र असलेली समान त्रिज्येची दोन वर्तुळे आहेत. रेषा L ही या दोन वर्तुळांची समाईक बाह्यस्पार्शिका असून ती वर्तुळांना अनुक्रमे R व S बिंदूत स्पर्श करते. रेख PR आणि रेख QS काढा. ∠ R चे माप किती असेल ? का ? ∠ S किती मापाचा असेल ? का ? रेख PR आणि रेख QS च्या लांबीत काय संबंध आहे ? यावरून आ. RPQS ही कोणती आकृती होईल ?

रेख PR ≅ रेख QS (वर्तुळांच्या त्रिज्या समान दिल्या आहेत.)

रेख PR ⊥ रेख L. तसेच रेख QS ⊥ रेषा L (स्पर्शबिंदूतून काढलेली त्रिज्या स्पर्शरेषेवर लंब असते.) रेख PR ∥ रेख QS (एकाच रेषेवर लंब)

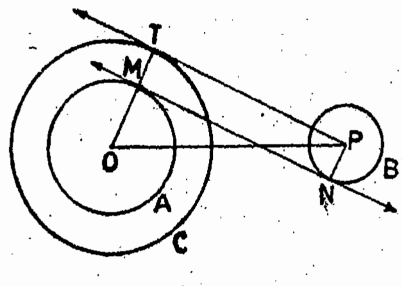
∴ आ. RPQS आयत आहे. ∴ $m\angle P = m\angle Q = 90$

यावरून समाईक बाह्यस्पर्शिका काढण्याची रीत लक्षात येते.

आता रचना तुम्ही सांगा व त्यानुसार आकृती काढून दाखवा.

[टीप : वरील उदाहरणात एकमेकांना न छेदणारी वर्तुळे घेतली आहेत. दोन वर्तुळे परस्परांना बाह्यतः स्पर्श करीत असतील किंवा दोन बिंदूत छेदत असतील तर त्यांच्या समाईक बाह्यस्पर्शिका याच पद्धतीने काढता येतील. या रचना तुम्ही करा.]

§ 8·15 एकाच प्रतलातील दिलेल्या दोन वर्तुळांच्या समाईक आंतरस्पर्शिका काढणे :

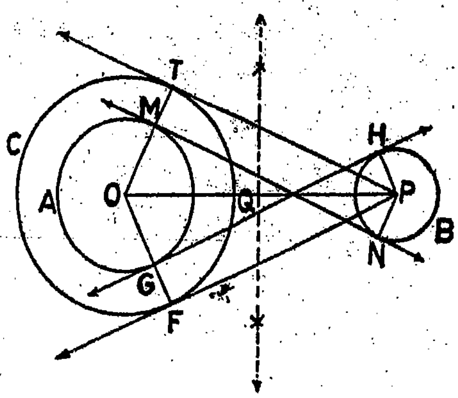


आ. 8·21

विश्लेषण :

समजा एकाच प्रतलात बिंदू O आणि बिंदू P केंद्र असलेली दोन वर्तुळे A व B आहेत. वर्तुळ A ची त्रिज्या a असून वर्तुळ B ची त्रिज्या b आहे. रेषा MN ही वर्तुळ A व B ची समाईक आंतरस्पर्शिका आहे. रेषा MN स्पर्शिका असल्यामुळे रेख OM ⊥ रेषा MN. तसेच रेख PN ⊥ रेषा MN. किरण OM वर बिंदू T असा घेतला की रेख MT ≅ रेख PN. बिंदू P व T सांधले तर आ. MNPT आयत होईल. अर्थात, रेख OT ⊥ रेषा PT. आता $l(OT) = l(OM) + l(MT) = l(OM) + l(NP) = a + b$. म्हणून बिंदू O केंद्र घेऊन $a + b$ त्रिज्येने काढलेल्या वर्तुळाची रेषा PT स्पर्शिका असेल.

वर्तुळे A व B दिली आहेत. त्यांच्या त्रिज्या a व b आहेत. वर्तुळ A चे केंद्र O हे केंद्र घेऊन $a+b$ त्रिज्येने वर्तुळ C काढता येईल. वर्तुळ B च्या केंद्रबिंदू P मधून वर्तुळ C ला स्पार्शिका PT काढता येईल. वर्तुळ C वरील स्पर्शबिंदू T आणि वर्तुळ A चा केंद्रबिंदू O यांना सांधणारा रेषाखंड वर्तुळ A ला बिंदू M मधे छेदील. बिंदू P मधून वर्तुळ B ला बिंदू N मधे छेदणारी रेषा PN ∥ रेषा OT अशी काढता येईल की त्यांच्या दिशा उलट असतील. आता बिंदू M व N मधून जाणारी रेषा काढता येईल. ही रेषा वर्तुळ A व B ची समाईक आंतरस्पर्शिका होईल. याच पद्धतीने दुसरी समाईक आंतरस्पर्शिका काढता येईल. आता खालील रचना पाहा.



आ. 8·22

रचना :

एकाच प्रतलात बिंदू O आणि P केंद्र असलेली दोन वर्तुळे दिली आहेत. या वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे a व b आहेत.

1. बिंदू O केंद्र घेऊन $a+b$ त्रिज्येने वर्तुळ काढा.
2. रेख OP चा मध्यबिंदू Q मिळवा. बिंदू Q केंद्र घेऊन l(QP) त्रिज्येने वर्तुळ D असे काढा की ते वर्तुळ C ला बिंदू T व F मधे छेदील.
3. रेषा PT व रेषा PF काढा. या रेषा वर्तुळ C च्या स्पर्शिका असतील.
4. स्पर्शबिंदू T आणि वर्तुळ A चा केंद्रबिंदू O सांधा. तसेच स्पर्शबिंदू F व बिंदू O सांधा. रेख OT ही वर्तुळ A ला M बिंदूत आणि रेख OF ही वर्तुळ A ला G बिंदूत छेदते असे समजा.
5. बिंदू P मधून, वर्तुळ B ला बिंदू N मधे छेदील अशी रेख PN ⊥ रेख PT काढा. तसेच बिंदू P मधून, वर्तुळ B ला बिंदू H मधे छेदील अशी रेख PH ⊥ रेख PF काढा.
6. रेषा GH आणि रेषा MN काढा.

रेषा MN आणि रेषा GH इष्ट स्पर्शिका होत.

§ 8·16 प्रश्न :

1. 4·5 सेमी त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. या वर्तुळावर कुठेही एक बिंदू घ्या. त्या बिंदूतून वर्तुळाची स्पार्शिका काढा. रचना लिहा.
2. ज्याची त्रिज्या 4 सेमी आहे असे एक वर्तुळ काढा. या वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूपासून 7·5 सेमी अंतरावर असलेल्या बिंदूतून वर्तुळाच्या दोन स्पर्शिका काढा.
3. 8 सेमी लांबीची रेख PQ घ्या. बिंदू P केंद्र घेऊन 4 सेमी त्रिज्येचे आणि बिंदू Q केंद्र घेऊन 3 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. या वर्तुळांना स्पर्श करणाऱ्या समाईक बाह्यस्पर्शिका काढा.
4. रेख PR असा काढा की l(PR) = 5·5 सेमी. बिंदू P केंद्र घेऊन 3·5 सेमी त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. बिंदू R केंद्र घेऊन 2·5 सेमी त्रिज्येचे दुसरे वर्तुळ काढा. या दोन वर्तुळांच्या समाईक बाह्यस्पर्शिका काढा. रचना लिहा.

5. प्रत्येकी 3·5 सेमी त्रिज्या असलेल्या दोन वर्तुळांचे केंद्रबिंदू A व B एकमेकांपासून 10 सेमी अंतरावर आहेत. ही दोन्ही वर्तुळे काढा व त्यांना एका बाजूस बिंदू P व Q मधे स्पर्श करणारी व दुसऱ्या बाजूस बिंदू R व S मधे स्पर्श करणारी समाईक बाह्यस्पर्शिका काढा. PRSQ कोणती आकृती आहे ? का ?

6. रेख MN असा घ्या की, $l(MN)=8{\cdot}5$ सेमी. बिंदू M केंद्र घेऊन 3·5 सेमी त्रिज्येचे एक वर्तुळ आणि बिंदू N केंद्र घेऊन 2·5 सेमी त्रिज्येचे दुसरे वर्तुळ काढा. या वर्तुळांच्या समाईक बाह्य-स्पर्शिका व समाईक आंतरस्पर्शिका एकाच आकृतीत काढा.

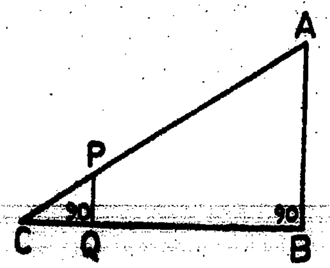
स्वाध्याय :

1. ज्याच्या बाजूंची लांबी 6·5 सेमी आहे असा एक समभुज त्रिकोण काढा. या त्रिकोणाच्या प्रत्येक शिरोबिंदूतून समोरील बाजूवर लंब काढा. त्रिकोणाची उंची मोजा.
2. $\triangle ABC$ असा काढा की, $l(AB)=6$ सेमी, $l(BC)=8$ सेमी आणि $l(CA)=10$ सेमी. त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजूच्या मध्यबिंदूतून त्या बाजूवर लंब काढा. लंबरेषा परस्परांना किती बिंदूंत छेदतात ?
3. $\triangle PQR$ असा काढा की $l(PQ)=4{\cdot}5$ सेमी, $l(QR)=6{\cdot}5$ सेमी आणि $l(RP)=7{\cdot}5$ सेमी. त्रिकोणाच्या प्रत्येक शिरोबिंदूतून समोरील बाजूवर लंब काढा. लंबरेषा परस्परांना किती बिंदूंत छेदतात ?
4. समभुज चौकोन ABCD मधे बाजू AB ची लांबी 6 सेमी असून $m\angle ABC=60$. समभुज चौकोन काढा. या चौकोनाचे दोन्ही कर्ण काढा. आता तयार झालेल्या चारी त्रिकोणांची आंतर-वर्तुळे काढा.
5. ज्याच्या बाजू 5 सेमी आहेत असा एक चौरस काढा. चौरसाचे दोन्ही कर्ण काढा. एकच बिंदू ज्यांचा समाईक शिरोबिंदू आहे अशा चारी त्रिकोणांची परिवर्तुळे काढा.
6. ज्याच्या बाजूंची लांबी 6 सेमी आहे असा समभुज $\triangle LMN$ काढा. या त्रिकोणाचे परिवर्तुळ आणि आंतरवर्तुळ एकाच आकृतीत काढा.
7. रेख PQ असा घ्या की $l(PQ)=10{\cdot}5$ सेमी. रेख PQ चा मध्यबिंदू M केंद्र घेऊन 3·5 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. बिंदू P व Q मधून वर्तुळाच्या स्पर्शिका काढा. या स्पर्शिकांना R व N बिंदूंत छेदू द्या. PRQT ही कोणती आकृती आहे
8. रेख MN असा काढा की $l(MN)=8$ सेमी. या रेषाखंडावर बिंदू L असा घ्या की $l(LN)=3$ सेमी. बिंदू L केंद्र घेऊन 2 सेमी त्रिज्येचे आणि बिंदू M केंद्र घेऊन 2·5 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. बिंदू N मधून दोन्ही वर्तुळांच्या स्पर्शिका काढा.
9. प्रत्येकी 2·5 सेमी त्रिज्या असणारी दोन वर्तुळे अशी काढा की, त्यांच्या केंद्रबिंदूंतील अंतर 6·5 सेमी असेल. या वर्तुळांच्या समाईक आंतरस्पर्शिका काढा. स्पर्शिकाखंडांची लांबी मोजा.
10. 7·5 सेमी लांबीचा एक रेषाखंड AB काढा. बिंदू A केंद्र घेऊन 3 सेमी त्रिज्येचे एक वर्तुळ व बिंदू B केंद्र घेऊन 2 सेमी त्रिज्येचे दुसरे वर्तुळ काढा. या वर्तुळांच्या समाईक बाह्यस्पर्शिका व समाईक आंतरस्पर्शिका एकाच आकृतीत काढा.

प्रकरण 9 : त्रिकोणमिती

§ 9·1 काही उंची किंवा अंतरे अशी असतात की त्यांचे प्रत्यक्ष मापन अनेक कारणांमुळे सहज शक्य नसते. उदाहरणार्थ, एखादया झाडाची उंची आपल्याला मोजायची आहे अशी कल्पना करा. अशा वेळी बुंध्यापासून (जमिनीपासून) तो थेट शेंड्यापर्यंत 'मोजपट्टी' लावण्यात आपल्याला अनेक अडचणी असतात. एखादया मोठ्या नदीच्या पात्राची रुंदी आपल्याला ठरवायची आहे अशी कल्पना करा. या कामासाठी या तीरापासून त्या तीरापर्यंत 'मोजपट्टी' लावता येणार नाहीच असे नाही. पण तसे करणे हे काम जिकिरीचे होईल. दुसऱ्या एखादया सोप्या मार्गाने अशी अंतरे ठरवण्याचे तंत्र जर आपल्याला गवसले तर या प्रत्यक्ष पद्धतीचा अवलंब करण्याचे कारण नाही. अशा अंतरांचे मापन हे सोप्या पद्धतीने करता येणे कसे शक्य आहे हे खालील उदाहरणाने स्पष्ट होईल.

उदा० : एका गृहस्थाला एका मनोऱ्याची उंची काढायची आहे. त्याने काही योजना आखून पुढीलप्रमाणे निरीक्षणे घेतली. आ. 9·1 मधे B हा मनोऱ्याचा पाया असून A हे मनोऱ्याचे शिखर आहे. C येथे पाहणाऱ्याचा डोळा आहे. त्याने एक काठी त्याच्या व मनोऱ्याच्या प्रतलात, जमिनीशी अशा ठिकाणी लंबरूप लावली की P हे त्या काठीचे वरचे टोक रेषा AC मधे येईल आणि Q हे काठीचे खालचे टोक रेषा BC मधे येईल. l(PQ) = 1 मीटर, l(CQ) = 1·5 मीटर आणि l(CB) = 30 मीटर अशी अंतरे आहेत.



आ. 9·1

या निरीक्षणांवरून मनोऱ्याची उंची त्याने पुढीलप्रमाणे काढली :

$$\triangle CPQ \sim \triangle CAB.$$

$$\therefore \frac{l(PQ)}{l(CQ)} = \frac{l(AB)}{l(CB)}.$$ पण $\triangle$ CPQ वरून, $$\frac{l(PQ)}{l(CQ)} = \frac{1}{1\cdot5}.$$

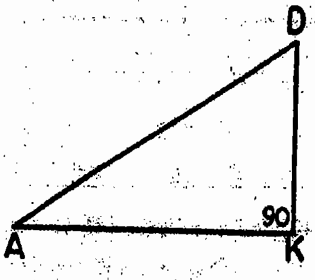
$$\therefore \frac{l(AB)}{l(CB)} = \frac{1}{1\cdot5}$$ व म्हणून $$l(AB) = l(CB) \times \frac{1}{1\cdot5} = 30 \times \frac{1}{1\cdot5} = 20.$$

म्हणजे त्या मनोऱ्याची उंची 20 मीटर असावी.

§ 9·2 मागील परिच्छेदात दिलेल्या उदाहरणाचा आपण आता अधिक विचार करू.

मनोऱ्याची उंची काढताना आपण $\triangle$ CPQ व $\triangle$ CAB या दोन काटकोन त्रिकोणांच्या समरूपतेचा उपयोग केला. दोन त्रिकोणांची समरूपता मिळण्यासाठी त्यांचे दोन कोन एकरूप असल्याचे माहीत असल्यास पुरे असते. समरूप दाखवायचे हे दोन त्रिकोण जर काटकोन त्रिकोण असतील तर त्यांचे एकेक लघुकोन एकरूप असल्याचे माहित असले तरीही पुरे असते. वर आपण समरूप म्हणून दाखवलेले त्रिकोण, काटकोन त्रिकोण होते. त्यामुळे त्यांचा एकेक लघुकोन एकरूप असल्याची माहिती, त्यांच्या समरूपतेसाठी पुरेशी झाली. $\angle$C हा समाईकच असल्यामुळे आपले काम अधिक सोपे झाले.

आता $\angle C$ एकरूप असलेला एक कोन ज्यात आहे असा दुसरा एखादा काटकोन त्रिकोण आपण काढू. हा समजा $\triangle ADK$ आहे (आ. 9·2 पाहा). इयात $\angle K$ हा काटकोन असून $\angle A$ हा (मागील परिच्छेदातील) $\angle C$ शी एकरूप आहे.



आ. 9·2

म्हणून, $\triangle ADK \sim \triangle CPQ \sim \triangle CAB$

$$\therefore \frac{l(DK)}{l(AK)} = \frac{l(PQ)}{l(CQ)} \text{ आणि } \frac{l(PQ)}{l(CQ)} = \frac{l(AB)}{l(CB)}$$

म्हणजेच, $$\frac{l(DK)}{l(AK)} = \frac{l(PQ)}{l(CQ)} = \frac{l(AB)}{l(CB)}. \quad \ldots(I)$$

येथे रेख DK ही भुजा, $\angle A$ च्या 'समोरील भुजा' आहे असे आपण म्हणू व रेख AK ही भुजा '$\angle A$ च्या लगतची भुजा' आहे असे म्हणू. तेव्हा वरील विधान (I) वरून आपल्याला पुढे दिल्याप्रमाणे निष्कर्ष काढता येतो.

'ज्या काटकोन त्रिकोणाचा एक कोन, $\angle C$ शी एकरूप आहे (आ. 9·1 मधील) असा कोणताही काटकोन त्रिकोण काढला तरी त्या कोनाच्या 'समोरील भजेचे,' त्या कोनाच्या 'लगतच्या भुजेशी' असलेले गुणोत्तर हे परिच्छेद 9·1 मधील उदाहरणातील मनोऱ्याच्या उंचीच्या $d(C, B)$ शी असणाऱ्या गुणोत्तराएवढे असते. म्हणजे, मनोऱ्याच्या उंचीचे $d(C,B)$ शी असलेले गुणोत्तर हे केवळ $\angle C$ च्या मापावर अवलंबून आहे असे आपल्या अनुभवास येते.

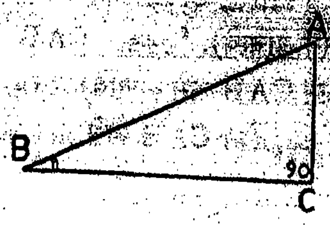
आता जर $\angle C$ च्या दिलेल्या मापासाठी $\dfrac{\text{मनोऱ्याची उंची}}{\text{B पासून C चे अंतर}}$ या गुणोत्तराची किंमत दुसऱ्या कोणत्या पद्धतीने आपल्याला मिळू शकली तर मनोऱ्याची उंची, C पासून त्या मनोऱ्याच्या पायापर्यंतचे अंतर मोजून आपल्याला सुलभपणे ठरवता येईल. परिच्छेद 9·1 मधील उदाहरणातील गृहस्थाने काठी PQ उभी करून, $d(P,Q)$ आणि $d(C, Q)$ मोजण्याची जी कृती केली ती $\angle C$ शी संबंधित गुणोत्तर ठरवण्यासाठीच हे आता आपल्या लक्षात येते.

खाली एक तक्ता दिला आहे. त्यात $\angle C$ चे माप, त्याशी संबंधित $\dfrac{\text{म० उंची}}{d(B,C)}$ हे गुणोत्तर आणि B चे C पासून अंतर यांच्या किमती दिल्या आहेत. त्यावरून दरवेळी संबंधित मनोऱ्याची उंची किती ते ठरवा.

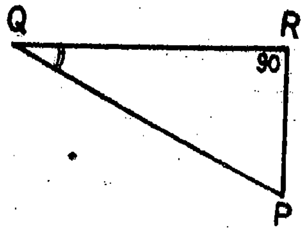
$m\angle C$	गुणोत्तर	d (B, C)	मनोऱ्याची उंची
20	$\frac{91}{250}$	250 मीटर	
30	$\frac{577}{1000}$	100 मीटर	
40	$\frac{21}{25}$	100 मीटर	
50	$\frac{119}{100}$	50 मीटर	
60	$\frac{433}{250}$	25 मीटर	

कोन व त्यांची ही संबंधित गुणोत्तरे यांचा अभ्यास आपण त्रिकोणमितीमध्ये करणार आहोत.

§ 9·3 काटकोन त्रिकोणातील विशिष्ट लघुकोनाच्या दृष्टीने, त्या त्रिकोणाच्या कोणत्या भुजेला काय म्हणावे याचा खुलासा खाली केला आहे. आ. 9·3 मधील $\triangle ABC$ मधे, रेख AB ला कर्ण म्हणावे हे आपल्याला माहीत आहे. $\angle B$ च्या दृष्टीने रेख AC ही त्याची 'संमुख भुजा' होय. रेख BC ला, $\angle B$ च्या दृष्टीने 'लगतची भजा' असे आपण म्हणू.



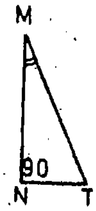
आ. 9·3



आ. 9

आ. 9·4 मधील $\triangle PQR$ मधे, रेख PQ हा कर्ण आहे. $\angle Q$ च्या दृष्टीने रेख PR ही संमुख भुजा आहे व रेख QR ही लगतची भुजा आहे.

आ. 9·5 मधे $\angle M$ च्या दृष्टीने संमुख भुजा कोणती व लगतची भुजा कोणती ?



आ. 9·5

§ 9·4 त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे (Trigonometrical Ratios) :

दिलेल्या मापाचा लघुकोन ज्यात आहे असा कोणताही काटकोन त्रिकोण काढला तरी त्या त्रिकोणाच्या तीन भुजांचे परस्परप्रमाण कायम असते हे आपल्याला माहीत आहे. या तीन भुजांपैकी दोन-दोन भुजांची परस्परांशी जी गुणोत्तरे असतात. ती त्या विशिष्ट लघुकोनासाठी कायम असतात. या गुणोत्तरांना त्या कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे म्हणतात.

काही महत्त्वाच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांची माहिती आता आपण पाहू.

(i) Sine **गुणोत्तर**

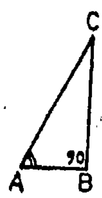
काटकोन त्रिकोणातील, दिलेल्या लघुकोनाच्या दृष्टीने $\frac{\text{संमुख भुजेची लांबी}}{\text{कर्णाची लांबी}}$ या गुणोत्तरास 'साईन' गुणोत्तर (sine) म्हणतात.

(ii) Cosine **गुणोत्तर**

काटकोन त्रिकोणातील, दिलेल्या लघुकोनाच्या दृष्टीने $\frac{\text{लगतच्या भुजेची लांबी}}{\text{कर्णाची लांबी}}$ या गुणोत्तरास 'कोसाईन' गुणोत्तर (cosine) म्हणतात.

(iii) Tangent **गुणोत्तर**

काटकोन त्रिकोणातील, दिलेल्या लघुकोनाच्या दृष्टीने $\frac{\text{संमुख भुजेची लांबी}}{\text{लगतच्या भुजेची लांबी}}$ या गुणोत्तरास 'टॅंजट' गुणोत्तर (tangent) म्हणतात. उदाहरणार्थ, आ. 9·6 मधे $\angle CAB$ च्या दृष्टीने, $\frac{l(BC)}{l(AC)}$ हे साईनगुणोत्तर आहे, $\frac{l(AB)}{l(AC)}$ हे कोसाईन गुणोत्तर आहे व $\frac{l(BC)}{l(AB)}$ हे टॅंजट गुणोत्तर आहे.



आ 9·6

व्यवहारात sine, cosine व tangent या नावांचे संक्षेप अनुक्रमे sin, cos व tan असे करतात आणि त्यांचा प्रयोग संबंधित कोनाच्या नावासोबत करतात. जसे—

'sin∠CAB' म्हणजे ∠CAB चे sine गुणोत्तर. (sin∠CAB हे साईन, कोन CAB असे वाचावे). 'cos∠CAB' म्हणजे ∠CAB चे cosine गुणोत्तर. (cos∠CAB हे कॉस, कोन CAB असे वाचावे). 'tan∠CAB' म्हणजे ∠CAB चे tangent गुणोत्तर. (tan∠CAB हे टॅन, कोन CAB असे वाचावे.)

अर्थातच, आ. 9·6 च्या संदर्भात,

$$\sin\angle CAB = \frac{l(BC)}{l(AC)}$$

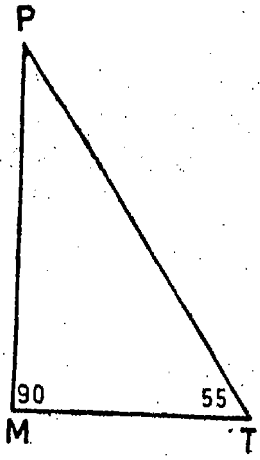
$$\cos\angle CAB = \frac{l(AB)}{l(AC)}$$

व $\tan\angle CAB = \frac{l(BC)}{l(AB)}$ होते.

तसेच, त्या आकृतीत, $\sin\angle ACB = \frac{l(AB)}{l(AC)}$ होते.

§ 9·5 कोनाचे पूर्ण तीन अक्षरी नाव (∠CAB प्रमाणे) देण्याऐवजी फक्त एक अक्षरी नाव दिल्याने गोंधळ होण्याचा जेथे संभव नसतो तेथे sin∠CAB म्हणण्याऐवजी किंवा लिहिण्याऐवजी केवळ sin∠A म्हटले किंवा लिहिले तरी चालते. आपण साईन, कोसाईन, टॅंजंट या गुणोत्तरांविषयी, कोनाच्या संदर्भातच बोलतो; तेव्हा sin∠A म्हणण्याऐवजी किंवा लिहिण्याऐवजी फक्त sin A म्हटले किंवा लिहिले तरी चालते. cos∠A ऐवजी cos A आणि tan∠A ऐवजी tan A लिहिले तरी चालते.

§ 9·6 कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे ही त्याच्या मापाशी निगडित असतात. म्हणून एखादा ∠B हा जर x मापाचा असेल तर ∠B च्या साईन गुणोत्तरासाठी sin∠B ऐवजी sin x असेही आपण म्हणू. (sin x हे साईन, x असे वाचावे.). जसे, आ. 9·7 मधील △PMT मधे, $m\angle M = 90$ व $m\angle T = 55$ आहे. तर $\cos 55 = \frac{l(MT)}{l(PT)}$, $\tan 55 = \frac{l(PM)}{l(MT)}$ आणि $\sin 55 = \frac{l(PM)}{l(PT)}$ असे म्हणता येते.

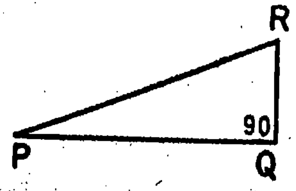


आ. 9·7

§ 9·7 प्रश्न :

खाली प्रत्येक प्रश्नासोबत आकृती दिली आहे. तीनुसार, त्या प्रश्नांत विचारलेली माहिती शोधा.

1.

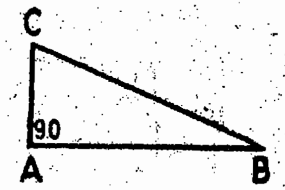


आ. 9·8

$\sin\angle RPQ = \frac{l(RQ)}{\ldots\ldots}$,

$\cos\angle RPQ = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$

$\tan\angle RPQ = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$

2. 

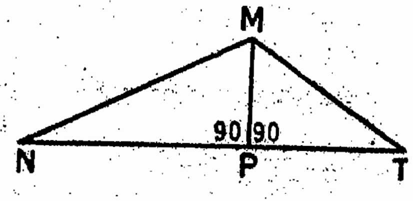
आ. 9·9

$\sin\angle C = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$, $\cos\angle C = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$,

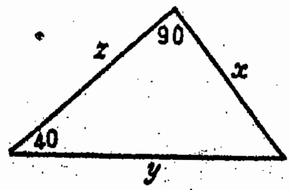
$\tan\angle B = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

3. $\sin\angle MNP = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$, $\cos\angle MTN = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$,

$\tan\angle NMP = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$



आ. 9·10

4. 

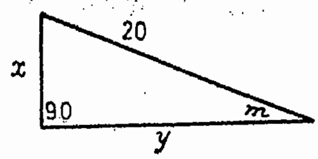
आ. 9·11

$\sin 40 = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$, $\tan 40 = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$,

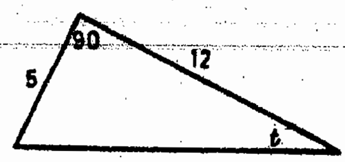
$\sin 50 = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

5. जर $\sin m = \frac{8}{10}$ असेल, तर $x =$ ———

आणि $y =$ ———



आ. 9·12

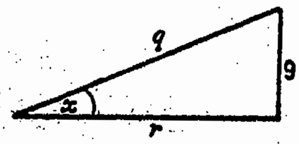
6 

आ. 9·13

$\tan t =$ ———, $\sin t =$ ———,

$\cos t =$ ———

7. $\tan x = 0{\cdot}225$ असेल तर, $\cos x =$ ———



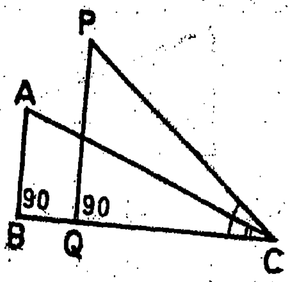
आ. 9·14

§ 9·8 मागील परिच्छेदात आपण कांही त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्या पाहिल्या. कर्ण ही कोणत्याही काटकोन त्रिकोणाची सर्वांत लांब भुजा असते या भूमितीय माहितीच्या आधारे, 'कोणत्याही लघुकोनाचे साईन गुणोत्तर हे 1 पेक्षा लहान असते' हा निष्कर्ष आपण सहजच काढू शकतो. तसेच, 'कोणत्याही लघुकोनाचे कोसाइन गुणोत्तरसुद्धा 1 पेक्षा लहान असते. टॅंजंट गुणोत्तराला मात्र अशी काही मर्यादा नसते. कारण, काटकोन त्रिकोणात एखाद्या लघुकोनांची संमुखभुजा, लगतच्या भुजेच्या कितीही पट मोठी असू शकते.

§ 9·9 साईन, कोसाइन आणि टॅंजंट ही गुणोत्तरे आहेत. पण त्या परिमेय संख्या (rational numbers) असतातच असे नाही. ही गुणोत्तरे वास्तव संख्या मात्र असतात.

§ 9·10 त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्यांवरून सहज लक्षात येणाऱ्या आणखी कावी गुणधर्मांची माहिती पुढे दिली आहे.

1. आ. 9·15 मधे दाखवल्याप्रमाणे दोन काटकोन त्रिकोण $\triangle ABC$ व $\triangle PQC$ असे काढले की दोघांचेही कर्ण (रेख AC व रेख PC) समान लांबीचे आहेत, व $m\angle ACB < m\angle PCQ$. साहजिकच, यांच्या संमुख भुजांच्या बाबतीत $l(AB) < l(PQ)$ आणि लगतच्या भुजांच्या बाबतीत, $l(BC) > l(QC)$. म्हणजे $\frac{l(AB)}{l(AC)}$ हे गुणोत्तर $\frac{l(PQ)}{l(PC)}$ या गुणोत्तरापेक्षा लहान राहील व $\frac{l(BC)}{l(AC)}$ हे गुणोत्तर $\frac{l(QC)}{l(PC)}$ पेक्षा मोठे राहील.



आ. 9·15

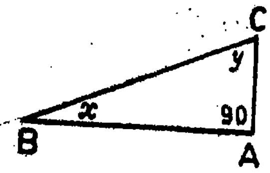
म्हणजेच, $\sin\angle ACB < \sin\angle PCQ$

आणि $\cos\angle ACB > \cos\angle PCQ$.

यावरून आपण असे म्हणू शकतो की,

लघुकोनाचे माप जसेजसे वाढते, तशीतशी त्याच्या साईन गुणोत्तराची किंमत वाढते व कोसाइन गुणोत्तराची किंमत कमी होते.

2.



आ. 9·16

काटकोन त्रिकोणातील दोन लघुकोन हे परस्परांचे कोटिकोन असतात. त्यांपैकी एकासाठी जी संमुखभुजा होते तीच दुसऱ्यासाठी लगतची भुजा होते. त्यामुळे, **दोन कोटिकोनांपैकी एकाचे साईन गुणोत्तर हे दुसऱ्याचे कोसाईन गुणोत्तर असते.**

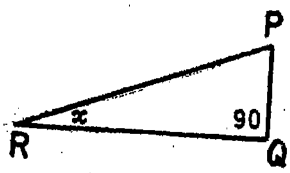
म्हणजे, $\sin x = \cos(90 - x)$.

3. साईन व कोसाईन यांच्या व्याख्यांप्रमाणे, दिलेल्या आकृतीतील (आ. 9·17) $\triangle PQR$ मधे

$\sin x = \frac{l(PQ)}{l(PR)}$, व $\cos x = \frac{l(QR)}{l(PR)}$

$$\therefore \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{l(PQ)}{l(PR)}}{\frac{l(QR)}{l(PR)}} = \frac{l(PQ)}{l(QR)}$$

$$= \tan x.$$

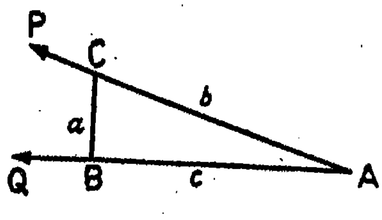


आ. 9·17

म्हणजे कोणत्याही लघुकोनाचे टॅंजंट गुणोत्तर हे त्याच कोनाच्या साईन व कोसाईन यांच्या गुणोत्तराएवढे असते.

§ 9·11 एकाच कोनाच्या साईन व कोसाईन गुणोत्तरांतील संबंध :

आ. 9·18 मधे $\angle PAQ$ च्या किरण AP या भुजेवरील C या एका बिंदूपासून रेषा AQ वर काढलेल्या लंबाचा पाया B आहे. $l(AB)$, $l(BC)$ व $l(AC)$ अनुक्रमे c, a व b यांनी दाखवल्या आहेत.



आ. 9·18

$\sin A = \frac{a}{b}$ आणि $\cos A = \frac{c}{b}$.

$\triangle ABC$ वरून पायथॅगोरसच्या प्रमेयाने,

$$a^2 + c^2 = b^2 \quad \therefore \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = 1 \quad \therefore \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = 1$$

$$\therefore (\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

म्हणजे कोणत्याही लघुकोनाच्या साईन गुणोत्तराचा वर्ग आणि कोसाईन गुणोत्तराचा वर्ग यांची बेरीज 1 असते.

$(\sin A)^2$ च्या ऐवजी $\sin^2 A$ लिहिण्याची प्रथा आहे. ($\sin^2 A$ हे साईन वर्ग A असे वाचावे) याच प्रकारे $(\cos A)^2$ ऐवजी $\cos^2 A$ लिहिता येते. म्हणून, $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$ हे विधान नेहमी $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ असे लिहितात.

§ **9·12** मागील परिच्छेदात अभ्यासलेल्या $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ या समीकरणाचा उपयोग ज्या अनेक ठिकाणी होऊ शकतो त्यांपैकी काहींची खुलासेवार माहिती व्हावी म्हणून खाली काही उदाहरणे सोडवून दाखवली आहेत.

1. जर $\sin A = \frac{4}{5}$ असेल तर $\cos A$ ची किंमत काढा.

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ आणि $\sin A = \frac{4}{5}$

$\therefore \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 A = 1$

$\therefore \cos^2 A = 1 - \frac{16}{25}$

$= \frac{9}{25}$

$\therefore \cos A = \frac{3}{5}$.

2. जर $\cos B = \frac{9}{41}$ असेल तर $\sin B$ व $\tan B$ यांच्या किमती काढा.

$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ आणि $\cos B = \frac{9}{41}$

$\therefore \sin^2 B + \left(\frac{9}{41}\right)^2 = 1$

$\therefore \sin^2 B = 1 - \frac{81}{1681}$

$= \frac{1600}{1681}$

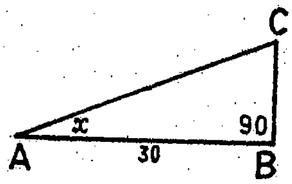
$\therefore \sin B = \frac{40}{41}$

आता $\tan B = \dfrac{\sin B}{\cos B}$

$$= \dfrac{\frac{40}{41}}{\frac{9}{41}}$$

$$= \dfrac{40}{9}.$$

3. दिलेल्या आकृतीत (आ. 9·19), $m\angle B = 90$, $m\angle A = x$ व $l(AB) = 30$. जर $\cos x = \dfrac{60}{61}$ असेल तर $l(AC)$ ची किंमत काढा.



आ. 9·19

$\triangle ABC$ मधे,

$$\cos A = \dfrac{l(BA)}{l(AC)}$$

$$\therefore \ \cos x = \dfrac{30}{l(AC)}$$

म्हणजे $\dfrac{60}{61} = \dfrac{30}{l(AC)}$

$$\therefore \ l(AC) = 30 \times \dfrac{61}{60}$$

$$= \dfrac{61}{2}$$

$$= 30{\cdot}5$$

§ 9·13 प्रश्न :

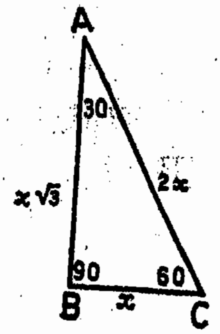
1. जर $\sin A = \frac{11}{61}$ असेल तर cos A व tan A यांच्या किमती काढा.
2. जर $\cos A = \frac{3}{4}$ असेल तर tan A ची किंमत काढा.
3. जर $\tan A = \frac{3}{4}$ असेल तर sin A व cos A च्या किमती काढा.

   (सूचना : $\tan A = \dfrac{3}{4} = \dfrac{\sin A}{\cos A}$. यावरून $\sin A = \frac{3}{4} \times \cos A$. पुढे $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ चा वापर करा.)
4. जर $\tan B = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$ असेल तर sin B व cos B च्या किमती काढा.

§ 9·14 30 व 60 मापांच्या कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे :

'काटकोन त्रिकोणात, 30 मापाच्या कोनासमोरील भुजा, कर्णाच्या निम्या लांबीची असते' हे प्रमेय आपण भूमितीत शिकलो आहोत. आता आपण त्या प्रमेयाचा त्रिकोणमितीय अर्थ पाहू.

आ. 9·20 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे, $\triangle ABC$ मध्ये $m\angle ABC=90$ आणि $m\angle BAC=30$. जर $l(BC)=x$ असेल तर $l(AC)=2x$ असते आणि $(AB)=x\sqrt{3}$ असते हे भूमितीवरून आपल्याला माहीत आहे. येथे



आ. 9·20

$$\sin A=\frac{(BC)}{l(AC)}$$

$$=\frac{x}{2x}$$

$$=\tfrac{1}{2}$$

म्हणजेच, $\sin 30=\frac{1}{2}$.

तसेच, $\cos A=\cos 30=\dfrac{l(AB)}{l(AC)}$

$$=\frac{x\sqrt{3}}{2x}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

आणि $\tan\ 30=\tan A=\dfrac{l(BC)}{l(AB)}$

$$=\frac{x}{x\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

याच आकृतीत (आ. 9·20), $m\angle ACB=60$.

$\therefore \sin C=\sin 60=\dfrac{x\sqrt{3}}{2x}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos C=\cos 60=\dfrac{x}{2x}$

$$=\tfrac{1}{2}$$

आणि $\tan C=\tan\ 60=\dfrac{x\sqrt{3}}{x}.$

$$=\sqrt{3}$$

§ 9·15 45 मापाच्या कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे :

'समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णाची लांबी, त्याच्या भुजेच्या लांबीच्या $\sqrt{2}$ पट असते' हे भूमितीतील प्रमेय आपल्या परिचयाचे आहे. त्रिकोणमितीय परिभाषेत त्याचा अर्थ काय होतो ते आपण आता पाहू.

आ. 9·21 मधे दाखवलेल्या $\triangle PQR$ मधे, $m\angle PQR = 90$ व $m\angle PRQ = 45$ आहे.

$\therefore$ $m\angle RPQ = 45$ आपोआपच होते.

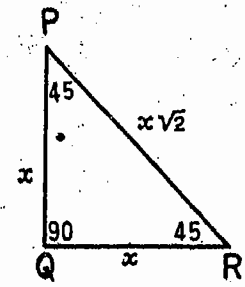
$\therefore$ समद्विभुज त्रिकोणाच्या व्यत्यास प्रमेयाने, $l(RQ) = l(PQ)$.

आपण $l(RQ) = x$ घेतल्यास, पायथॅगोरसच्या प्रमेयाने,

$$(l(PR))^2 = x^2 + x^2$$

$$= 2x^2.$$

$\therefore$ $l(PR) = x\sqrt{2}$ होते.



आ. 9·21

आता, $\sin R = \sin 45 = \dfrac{l(PQ)}{l(PR)}$

$$= \frac{x}{x\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos R = \cos 45 = \frac{l(RQ)}{l(PR)}$$

$$= \frac{x}{x\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

आणि $\tan R = \tan 45 = \dfrac{l(PQ)}{l(RQ)}$

$$= \frac{x}{x}$$

$$= 1.$$

§ **9·16** 30, 45 व 60 ह्या मापांच्या कोनांची साईन, कोसाईन व टॅंजंट ही त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे खाली एका तक्त्यात एकत्र दाखवली आहेत. या गुणोत्तरांचा पुढील अभ्यासात वारंवार उपयोग करावा लागणार आहे. तेव्हा, त्यांचे नीट स्मरण राहील अशा प्रकारे या गुणोत्तरांचा अभ्यास करा.

कोनाचे माप	साईन	कोसाईन	टजंट
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
6	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

§ 9·17 सोडवलेली उदाहरणे :

1. गुणोत्तरांच्या किमती टाकून, पुढील राशींना संक्षिप्त रूप द्या.

i. $\tan^2 30 \times \tan^3 45 \times \sin 30.$

$$\text{दिलेल्या राशी} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \times (1)^3 \times \left(\tfrac{1}{2}\right)$$
$$= \tfrac{1}{3} \times 1 \times \tfrac{1}{2}$$
$$= \tfrac{1}{6}$$

ii. $\sin^3 30 \times \cos 60 \times \cos^2 30.$

$$\text{दिलेली राशी} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \times \tfrac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{8} \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{4}$$
$$= \tfrac{3}{64}.$$

2. $\dfrac{1-\tan^2 30}{1+\tan^2 30} = \tfrac{1}{2}$ हे दाखवा.

$$\frac{1-\tan^2 30}{1+\tan^2 30} = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$= \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$$
$$= \tfrac{1}{2}.$$

§ 9·18 प्रश्न :

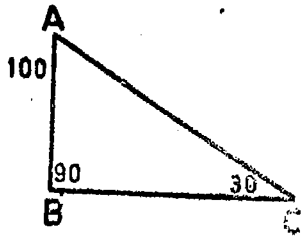
1. किमती काढा :

(i) $\sin^2 30 \times \cos 60.$ (ii) $\sin^2 30 + \sin^2 45 + \sin^2 60.$

(iii) $2\tan^2 45 + 3\tan^2 30 + 4\tan 60.$

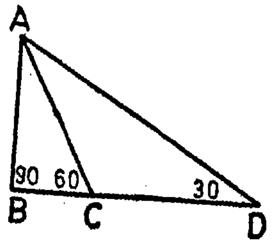
(iv) $\dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{\tan^2 30} + 3\sin^2 60 - \dfrac{2}{\sin^2 30} - \dfrac{3}{4} \times \tan^2 30.$

2. जर $\triangle ABC$ मधे, $m\angle ABC = 90$ असून $m\angle ACB = 30$ आणि $l(AB) = 100$ असेल तर $l(AC)$ व $l(BC)$ यांच्या किमती काढा (आ.9·22 पाहा).



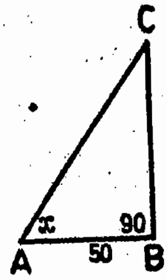
आ. 9·22

3. आ. 9·23 मधे दाखवल्याप्रमाणे, रेख $AB \perp$ रेख BD $m\angle ADB = 30$ व $m\angle ACB = 60$. जर $l(AB) = 50$. तर $l(CB)$ आणि $l(DC)$ यांच्या किमती ठरवा.



आ. 9·23

4. आ. 9·24 मधील $\triangle ABC$ मधे $\angle A$ चे माप x आहे. जर $\tan x = 1{\cdot}32$ असेल आणि $l(AB)$ ची किंमत आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे असेल तर $l(BC)$ ची किंमत काढा.



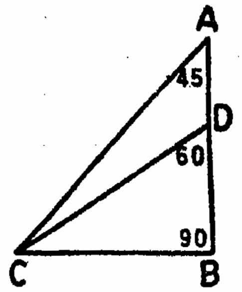
आ. 9·24

5. पुढील विधानांत रिकाम्या जागी योग्य शब्द भरा.

(i) लघुकोन जसजसा मोठा होतो, तशीतशी त्याच्या 'साईन' ची किंमत ________

(ii) दोन लघुकोनांपैकी ज्याचे कोसाईन, दुसऱ्याच्या कोसाईन पेक्षा मोठे असते, तो कोन त्या दुसऱ्या कोनापेक्षा ________ असतो.

6. बाजूच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे (आ. 9·25) $m\angle ABC = 90$, $m\angle CAD = 45$ व $m\angle CDB = 60$. जर $l(AD) = 70$ असेल तर $l(CB)$ ची किंमत काढा.



आ. 9·25

§ 9·19 प्रत्येक लघुकोनाशी साईन, कोसाईन, टॅंजंट ही त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे निगडित असतात व ती त्या लघुकोनासाठी कायम असतात हे आपण पाहिले आहे. 30, 45, 60 या मापांच्या कोनांसाठी या गुणोत्तरांच्या किंमती, भूमितीय गुणधर्मांच्या आधारे आपण निश्चित केल्या. इतर मापांच्या कोनांसाठी या गुणोत्तरांच्या किमती निश्चित करण्याचे सोपे मार्ग उपलब्ध नाहीत. उच्च गणितातील काही पद्धतींनी ह्या गुणोत्तरांच्या किमती हव्या तेवढ्या अचूकपणे ठरवता येतात. पण ते काम जिकिरीचे असल्यामुळे अशा सर्व कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांसाठी एक संदर्भसारणी तयार असल्यास सोयीचे पडते. अशी सारणी कोणत्याही त्रिकोणमितीच्या पुस्तकाच्या शेवटी दिलेली असते. बहुतांशाने ह्या गुणोत्तरांच्या किनती ठोकळमानाच्या असतात हे लक्षात ठेवावे.

§ 9·20 उंची आणि अंतरे :

दोन, दूरच्या ठिकाणांमधील अंतर किंवा खूप उंच असणाऱ्या ठिकाणाची उंची, ठरवण्यासाठी त्यांचे प्रत्यक्ष मापन न करता, त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांचा उपयोग होऊ शकतो हे आता आपल्या लक्षात आले आहे. यासंबंधीची माहिती आपल्याला काहीशा विस्ताराने आता पाहायची आहे.

गणिताच्या दृष्टीने, जमिनीवर उभे असणारे झाड किंवा टेकडी, हे स्थूलमानाने जमिनीशी काटकोनात असते. तेव्हा पाहणाऱ्याचा (निरीक्षकाचा) डोळा व झाडाची दोन टोके (बुंधा व शेंडा) यांच्या योगे एका काटकोन त्रिकोणाची निर्मिती होते. काटकोन त्रिकोणातील एखादा कोन (काटकोनाव्यतिरिक्त) व एखादी भुजा जर माहीत असतील तर त्या कोनाच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या साहाय्याने इतर भुजांच्या लांबी ठरवता येतात हे मागील परिच्छेदातील विवेचनावरून आपल्या लक्षात आलेच आहे. या विषयावर प्रत्यक्ष उदाहरणे सोडवू लागण्यापूर्वी काही पारिभाषिक शब्दांची ओळख आपल्याला करून घ्यावी लागेल.

§ 9·21 उन्नतकोन व अधःकोन (Angles of Elevation and Depression) :

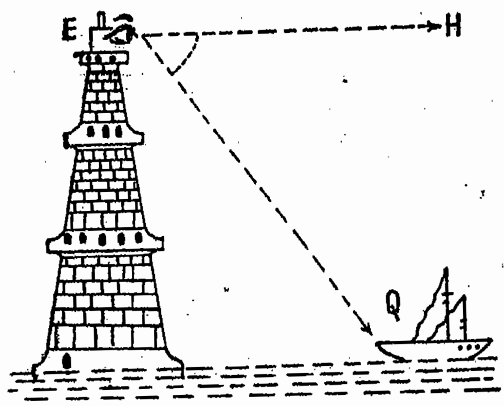
आ. 9·26 व आ. 9·27 पाहा. दोन्हीमधे E येथे निरीक्षकाचा डोळा दाखवला आहे. किरण EH हा E मधून काढलेल्या क्षितिजरेषेत आहे.

आ. 9·26 मधे, P या बिंदूकडे निरीक्षक पहात आहे. P, E व H हे एकाच उभ्या पातळीत आहेत. अशावेळी, ∠PEH ला P बिंदूचा उन्नतकोन (angle of elevation) म्हणतात.

आ. 9·27 मधे, निरीक्षक Q या बिंदूकडे पाहत असल्याचे दाखवले आहे. Q, E व H हे एकाच उभ्या पातळीत आहेत. येथे, ∠QEH हा Q बिंदूचा अधःकोन (angle of depression) आहे.



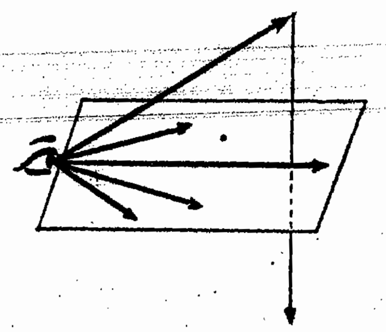
आ. 9·26



आ. 9·27

आ. 9·26 मधे, P हा जहाजाच्या शिडाचे टोक असल्याचे दाखवले आहे. म्हणजे यावेळी, निरीक्षकाला आपली नजर 'वर' उचलावी लागली असेल हे उघड आहे. आ. 9·27 मधे Q हा जहाज दाखवतो. पण निरीक्षक एका दीपगृहाच्या शिखरावरून पाहत आहे. म्हणजे त्याला आपली नजर 'खाली' झुकवावी लागली असेल हे उघड आहे.

दिलेल्या बिंदूकडे पाहण्यासाठी, निरीक्षकाला आपली दृष्टी जर क्षितिजसमांतर पातळीच्या वर उचलावी लागली तर उन्नतकोन होतो आणि दृष्टी जर खाली वळवावी लागली तर अधःकोन होतो. उन्नतकोन किंवा अधःकोन हा नेहमी पाहण्याची दिशा व निरीक्षकाच्या डोळ्यातून जाणारी क्षितिजसमांतर पातळी यांतील कोन होय. आपल्या डोळ्यातून असंख्य क्षितिजसमांतर रेषा जातात. यांपैकी कोणत्या रेषेशी आपण उन्नतकोन किंवा अधःकोन मोजतो? ज्या बिंदूकडे आपण पाहत आहोत, त्या बिंदूपासून क्षितिजसमांतर पातळीवर काढलेल्या लंबाचा पाया, ज्या क्षितिज समांतर रेषेत असेल, त्या रेषेशी हा कोन मोजावा लागेल. आ 9·28 मधे याचाच खुलासा केला आहे.


आ. 9·28

उन्नतकोन :

उंच इमारतीच्या किंवा मनोऱ्याच्या शिखराकडे किंवा आकाशातून उडणाऱ्या विमानाकडे जमिनीवरून पाहण्यासारख्या प्रसंगी उन्नतकोन होतील.

अधःकोन :

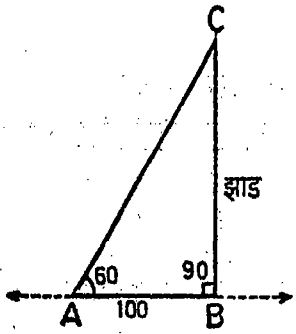
झाडाच्या शेंड्यावरून किंवा टेकडीवरून जमिनीवरील ठिकाणांकडे पाहण्याच्या वेळी अधःकोन होतील. असे उन्नतकोन किंवा अधःकोन अचूकपणे मोजण्यासाठी **थिओडोलाइट** (Theodolite) व **सेक्सटंट** (Sextant) ही उपकरणे प्रमुखतः वापरली जातात. सेक्स्टंटसंबंधी तुम्ही इयत्ता 9 च्या भौतिकशास्त्राच्या पुस्तकात बहुधा वाचले असेल. येथे या उपकरणांच्या रचनेच्या व कार्यपद्धतीच्या तपशिलात शिरण्याचे आपल्याला प्रयोजन नाही.

उन्नतकोन वा अधःकोन यांसंबंधी एक गोष्ट विशेष लक्षात ठेवण्यासारखी आहे. ती ही की, म्हणताना जरी आपण 'अमुक एका बिंदूचा उन्नतकोन' म्हटले तरी तो कोन होत असतो डोळ्यापाशी! त्या बिंदूपाशी नव्हे. उदाहरणार्थ, 'विमानाचा उन्नतकोन 60 मापाचा आहे' म्हटले असता, तो 60 मापाचा कोन डोळ्यापाशी होतो, विमानापाशी नव्हे.

§ 9·22 सोडवलेली उदाहरणे :

उदाहरण 1 : एका झाडाच्या बुंध्यापासून 100 मीटर अंतरावर असणाऱ्या व्यक्तीला झाडाच्या शेंड्याकडे पाहताना 60 मापाचा उन्नतकोन करावा लागतो. तर झाडाची उंची किती असावी ?

आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे (आ. 9·29) रेख BC हे झाडाचे प्रतिरूपक माना.



आ. 9·29

$\angle ABC$ हा काटकोन होईल.

$\angle CAB$ हा उन्नतकोन आहे. $m\angle CAB = 60$.

d (A, B) हे 100 मीटर आहे.

$\triangle ABC$ मध्ये, $\tan\angle CAB = \dfrac{l\,(BC)}{l\,(AB)}$.

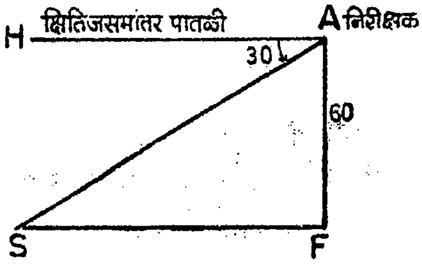
$\therefore\ \tan 60 = \dfrac{l\,(BC)}{100}$.

$\therefore\ \sqrt{3} = \dfrac{l\,(BC)}{100}\quad \therefore\ l\,(BC) = 100\sqrt{3}$.

$\sqrt{3}$ ची अंदाजी किंमत 1·73205... आहे. म्हणजे व्यावहारिक सोयीसाठी ठोकळमानाने $\sqrt{3}$ ची किंमत 1·732 घेतल्यास, दिलेल्या उदाहरणात झाडाची उंची $100 \times 1{\cdot}732$ मीटर म्हणजे 173·2 मीटर (ठाकळमानाने) आहे असे म्हणता येते.

उदाहरण 2 : 60 मीटर उंचीच्या दीपगृहाच्या छतावरून समुद्रातील जहाजे टेहळणाऱ्या एका निरीक्षकाला एका जहाजाचा अधःकोन 30 मापाचा आढळला, तर त्या वेळी ते जहाज त्या दीपगृहापासून किती दूर असावे ?

आ. 9·30 मधे दाखवल्याप्रमाणे, A हे निरीक्षकाचे ठिकाण असून S हे जहाजाचे ठिकाण आहे. F हा दीपगृहाचा समुद्रसपाटीतील पाया आहे. किरण AH हा प्रतल ASF मधील, क्षितिजसमांतर पातळी दाखवतो. $\angle HAS$ हा अधःकोन आहे. $m\angle HAS = 30$ आणि $d\,(A, F) = 60$.



आ. 9·30

$m\angle HAS = m\angle ASF$ ..... (व्युत्क्रमकोन)

आता, काटकोन त्रिकोण $\triangle ASF$ वरून

$$\tan\angle ASF = \frac{l\,(AF)}{l\,(SF)}$$

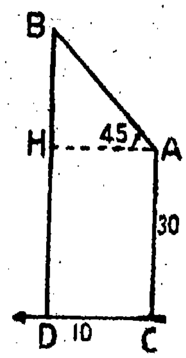
$$\therefore\quad \tan 30 = \frac{60}{l\,(SF)}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{60}{l\,(SF)}\quad \therefore\ l\,(SF) = 60 \times \sqrt{3}.$$

$\sqrt{3}$ ही संख्या अपरिमेय आहे व तिची ठोकळमानाने किंमत आपण 1·732 घेत असतो तेव्हा दीपगृह व ते जहाज यांतील अंतर $(60 \times 1{\cdot}732)$ मीटर म्हणजेच 103·92 मीटर असावे.

उदाहरण 3 : 10 मीटर रुंदीच्या रस्त्याच्या दुतर्फा एकमेकांच्या अगदी समोर दोन इमारती आहेत. त्यांपैकी एकीची उंची 30 मीटर असून तिच्या छतावरून दुसरीच्या छताकडे पाहताना उन्नतकोन 45 मापाचा होतो. तर त्या दुसऱ्या इमारतीची उंची किती असावी ?

आ. 9·31 मधे दाखवल्याप्रमाणे A व B हे त्या इमारतींचे सर्वोच्च बिंदू आहेत. अनुक्रमे C व D हे त्या इमारतींचे रस्त्याच्या पातळीतील बिंदू आहेत. $d(A, C)=30$ हे आपल्याला दिले आहे. $d(B, D)$ किती ते आपल्याला ठरवायचे आहे. A मधून काढलेली क्षितिजसमांतरपातळी रेख BD ला H मधे छेदते. $\angle BAH$ हा उन्नतकोन आहे.



आ. 9·31

□ACDH हा काटकोन चौकोन होतो हे उघडच आहे.

त्यामुळे, $d(D, C)=d(A, H)=10$

व $d(A, C)=d(H, D)=30$

आता काटकोनत्रिकोण $\triangle ABH$ वरून

$$\tan \angle BAH=\frac{l(BH)}{l(HA)}$$

$$\therefore \quad \tan 45=\frac{l(BH)}{10}$$

$$\therefore \quad 1=\frac{l(BH)}{10} \qquad \therefore \quad l(BH)=10.$$

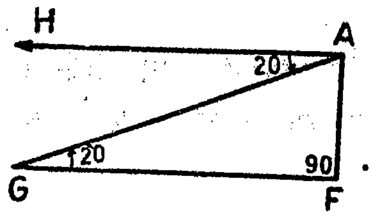
आता, $l(BD)=l(BH)+l(HD)$

$=l(BH)+l(AC)$

$\therefore \ l(BD)=10+30=40$

$\therefore$ त्या दुसऱ्या इमारतीची उंची 40 मीटर असावी.

उदाहरण 4 : आकाशात उडत असलेल्या एका विमानाच्या चालकाने विमानतळाकडे पाहिले, तेव्हा जमिनीवरील त्याच्या संकेतस्थळाचा अधःकोन 20 मापाचा होता. त्याने त्या संकेतस्थळाच्या सरळ रोखाने आपले विमान झेपावले. सरासरी 200 किमी प्रति तास या वेगाने ते 54 सेकंदांत संकेतस्थळी पोचले. तर विमानाने झेप सुरू करण्याच्या क्षणी ते जमिनीपासून किती उंचीवर असावे ?



आ. 9·32

आ. 9·32 मधे, A ही विमानाची झेप सुरू होणाऱ्या क्षणी असणारी स्थिती दाखवली असून G हे जमिनीवरील संकेतस्थळ दाखवले आहे. A पासून जमिनीवर काढलेल्या लंबाचा पाया F आहे. किरण AH ने, प्रतल AFG मधे A मधून जाणारी क्षितिज-समांतर पातळी दाखवली आहे.

A पासून G पर्यंतचे अंतर कापण्यास, विमानास दरताशी 200 किमी प्रति तासप्रमाणे 54 सेकंद लागल्याचे आपल्याला दिले आहे. त्यावरून $d(A, G)=\frac{200\times 54}{3600}$ किमी म्हणजेच, $d(A, G)=3$ किमी असावे.

$\angle HAG$ या अधःकोनाचे माप 20 दिले आहे.

$m\angle HAG=m\angle AGF$ ....(व्युत्क्रमकोन)

काटकोन त्रिकोण $\triangle AGF$ वरून,

$$\sin \angle AGF=\frac{d(A, F)}{d(G, A)}.$$

त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या संदर्भसारणी वरून, $\sin 20 = 0{\cdot}342$

$$\therefore \ 0{\cdot}342 = \frac{d(A, F)}{3}$$

$$\therefore \ d(A, F) = 3 \times 0{\cdot}342 = 1{\cdot}026$$

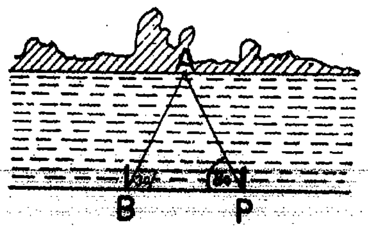
∴ झेप सुरू करण्याच्या क्षणी ते विमान जमिनीपासून 1·026 किमी उंचीवर असावे.

§ 9·23 **प्रश्न :**

1. एका किल्ल्याच्या भिंतीपासून 1·5 मीटर अंतरावर उभे राहून त्या भिंतीच्या वरच्या टोकाकडे पाहण्याचा उन्नतकोन 85 मापाचा होतो. त्या ठिकाणापासून भिंतीच्या वरच्या काठापर्यंत शिडी लावायची झाल्यास तिची लांबी कमीतकमी किती असावी लागेल ? (COS 85 = 0.087)

2. एका समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायाची लांबी 8 सेमी आहे. पायासमोरील कोनाचे माप 30 आहे. तर या पायावर काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी ठरवा.

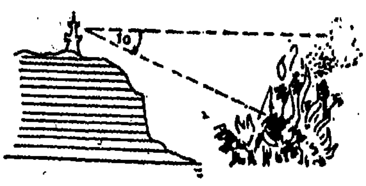
3. एका नदीवर पूल बांधायचा आहे. प्राथमिक मोजणीसाठी एका अभियंत्याने नदीच्या विरुद्ध तीरावर परस्परांच्या अगदी समोरासमोर येतील अशा प्रकारे A व B येथे दोन मोठया खुंटया रोवल्या (आ. 9·33 पाहा). नंतर ज्या तीरावर B आहे त्याच तीरावर B पासून 30 मीटर अंतरावरील P हे एक ठिकाण त्याने असे निवडले की, रेषा PB ⊥ रेषा AB. ∠ APB चे माप त्याच्या मोजणीत 80 भरले. तर A पासून B पर्यंत पात्राची रुंदी किती असावी ? (tan 80 = 5·671)



आ. 9·33

4. अग्निशामकदलाच्या वाहनावर बसवलेली एक शिडी जास्तीतजास्त 70 मापाच्या कोनातून उचलता येते व त्या वेळी तिची लांबी जास्तीतजास्त 20 मीटर असते. शिडीचे वाहनावरील टोक जमिनीपासून 2 मीटर उंचीवर आहे. तर त्या शिडीचे दुसरे टोक जमिनीपासून जास्तीत जास्त किती उंचीवर पोचवता येईल ? (sin 70 = 0·940)

5. जंगलातील आगींवर नजर ठेवण्यासाठी एका टेकडीवर एक मनोरा बांधला असून त्याच्या सर्वोच्च ठिकाणी निरीक्षकाचे स्थान आहे. मनोरा बांधला ते ठिकाण टेकडीच्या पायथ्याच्या आसमंतातील जमिनीपासून सरासरी 80 मीटर उंचीवर आहे मनोऱ्याची उंची 15 मीटर आहे निरीक्षकाला एका आगीचे ठिकाण 10 मापाच्या अधः-कोनावर दिसले (आ. 9·34 पाहा). तर आग, मनोऱ्या-पासून किती अंतरावर असावी ? (tan 10 = 0·176)

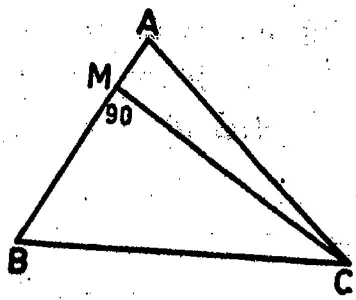

आ. 9·34

6. 2 किमी उंचीवरून उडत असलेल्या एका विमानातून एका मनोऱ्याच्या शिखराला अधःकोन 60 मापाचा असून त्याच इमारतीच्या पायाचा अधःकोन 70 मापाचा आहे. तर त्या मनोऱ्याची उंची किती असावी ? (tan 70 = 2·747)

स्वाध्याय :

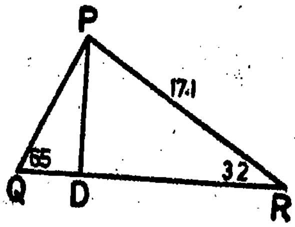
1. आ. 9·35 च्या संदर्भाने खालील विधाने पूर्ण करा.

   (i) $\sin B = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$, (ii) $\tan \angle MCB = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$



आ. 9·35

2. आ. 9·36 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे $\triangle PQR$ मध्ये $l(PQ) = 10$ व $m\angle Q = 65$. तर l (PD) ठरवा (sin 65 = 0·906). जर $m\angle R = 32$ असेल तर $l(PR) = 17{\cdot}1$ असते हे दाखवा व l (QD), l (DR) व l (QR) ठरवा (sin 32 = 0·530).



आ. 9·36

3. $\triangle ABC$ मधे, l (BC) = 16, l (AB) = 10 व $m\angle B = 57$. तर रेख BC वरील शिरोलंबाची लांबी ठरवा. त्याचप्रमाणे रेख AB वरील शिरोलंबाची लांबीही ठरवा (sin 57 = 0·839).

4. $\triangle DEF$ मधे, l (DE) = 8, l (EF) = 12 व $m\angle E = 48$. तर $\triangle DEF$ चे क्षेत्रफळ ठरवा (sin 48 = 0·743).

5. आ. 9·37 च्या संदर्भात पुढील प्रश्न सोडवा.

   (A) खालील विधानांत रिकाम्या जागा सोडल्या आहेत. विधाने सत्य होतील अशा प्रकारे त्या जागा भरा.

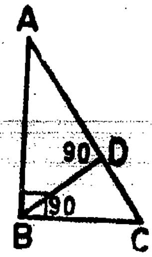
   (i) $\sin\angle ABD = \cos\angle B$☆D

   (ii) $\sin\angle ABD = \sin\angle$☆☆D

   (iii) $\cos\angle DBC = \cos\angle B$☆☆

   (B) खाली दिलेल्या विधानातील रिकाम्या जागी, ते विधान सत्य होण्यासाठी, '=', '<' व '>' यापैकी योग्य ते चिन्ह वापरा.

   जर $m\angle ABD > m\angle BAD$ असेल तर $\sin\angle DBC \cdots\cdots \sin\angle BCD$.



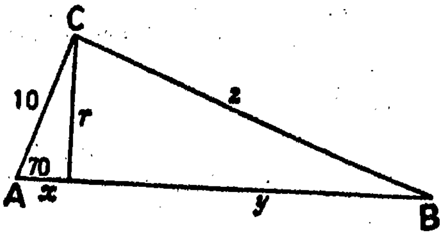
आ. 9·37

6. आ. 9·38 मधे दाखवल्याप्रमाणे, $\triangle ABC$ मधे, l (AC) = 10, $m\angle ACB = 90$ व $m\angle CAB = 70$.

   तर आकृतीत,

   $x = \cdots\cdots$ $r = \cdots\cdots$

   $y = \cdots\cdots$ $z^2 = \cdots\cdots$



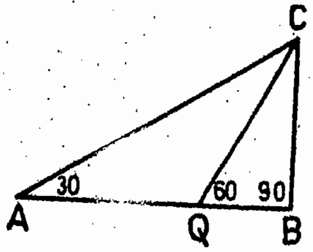
आ. 9·38

7. $\triangle PQR$ मधे, l (PQ) = 12, l (QR) = 15 आणि $m\angle Q = 60$ तर l (PR) = 13·75 हे दाखवा.

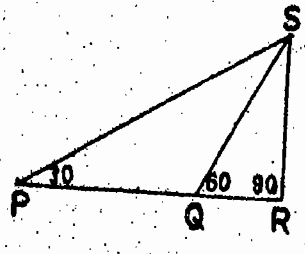
8. जर $\sin x = \frac{8}{17}$ तर $\cos x = \cdots\cdots\cdots$

9. दिवाळीच्या फटाक्यांमधील एक 'रॉकेट' जमिनीशी 70 मापाचा कोन करून उडाले ते थेट समोरच्या घराच्या माडीच्या खिडकीत शिरले. 'रॉकेट'च्या प्रक्षेपण स्थळापासून ते घर 10 मीटर दूर असल्यास त्या खिडकीची जमिनीपासून उंची किती? (tan 70 = 2·747)

10. सोबतच्या आकृतीत, $m\angle A=30$, $m\angle Q=60$ आणि $m\angle B=90$. जर $d(B, C)=10$ तर $d(A, B)=?$ $d(Q, B)=?$ व $d(A, Q)=?$



आ. 9·39



आ. 9·40

11. आ. 9·40 मध्ये, $m\angle P=30$, $m\angle SQR=60$, $m\angle R=90$ व $d(Q, R)=20$. तर $d(P, Q)$ ठरवा.

12. आ. 9·41 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे, $m\angle A=30$, $m\angle B=45$ व $m\angle C=90$, $d(A, B)=100$.

तर पुढील विधानांत रिकाम्या जागा भरा.

$$\tan\angle A=\frac{d(D, C)}{d(B, C)+100}$$

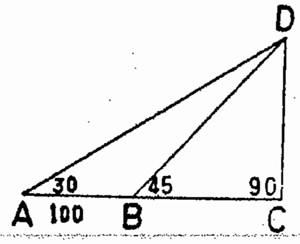
$$\therefore [d(B, C)+100]\times\frac{1}{\sqrt{3}}=d(\cdots\cdots)$$

पण, $\dfrac{d(D,C)}{d(B,C)}=\tan 45=1$

$\therefore\ d(D,C)=d(B,C)$

$\therefore\ d(D,C)+100=\sqrt{3}\times d(\ldots\ldots\ldots)$

$\therefore\ d(D,C)=\ldots\ldots\ldots$



आ. 9·41



आ. 9·42

13. सोबतच्या आकृतीत (आ. 9·42), $d(T,Q)=300$
$m\angle M=90$, $m\angle MNT=26$.
व $m\angle MNQ=74$.
तर $d(M,N)$ ठरवा. ($\tan 74=3{\cdot}487$, $\tan 26=0{\cdot}488$)

14. जमिनीवरून पाहताना एका मंदिराच्या कळसाचा उन्नतकोन 70 मापाचा होतो. पाहण्याच्या ठिकाणी असलेल्या एका 4 मीटर उंच खांबाच्या टोकाशी जाऊन मंदिराच्या कळसाकडे पाहिल्यास उन्नतकोन 20 मापाचा होतो. तर मंदिराची, कळसापर्यंतची उंची किती? ($\tan 70=2{\cdot}747$ आणि $\tan 20=0{\cdot}364$)

प्रकरण 10 : प्रतलीय निर्देशक भूमिती :

§ 10·1 दोन हजार वर्षांपूर्वी ग्रीकांनी भूमितीविषयक बरेच ज्ञान संपादन केले होते. त्यांनी या विषयाची पद्धतशीर मांडणीही केली होती. त्यानंतर मात्र अनेक वर्षे भूमितीच्या ज्ञानात विशेष वाढ झाली नाही. ग्रीकांच्या नंतर भूमितीच्या ज्ञानात मोलाची भर टाकणारी व्यक्ती फ्रेंच गणितज्ञ **रेने देकार्त** (René Descartes) होय. सतराव्या शतकात देकार्तने **निर्देशक भूमिती** (Coordinate Geometry) ही भूमितीचे गुणधर्म अभ्यासण्याची नवी पद्धत जगाला दिली.

[रेने देकार्त (1596–1650) हा एक थोर गणितज्ञ होता इतकेच नव्हे तर तो एक थोर तत्त्ववेत्ताही होता. त्याने निर्देशक भूमितीला जन्म दिला. त्याच्या या कार्यामुळे बीजगणित व भूमिती एकमेकांना पूरक ठरले आणि या विषयांचा विकास झाला. तुम्ही ज्या प्रकारची निर्देशक भूमिती अभ्यासणार आहात तिला आजही मूळ संशोधकाच्या नावावरून **कार्तेसीय भूमिती** म्हटले जाते. देकार्तच्या संशोधनाचे थोडे श्रेय **पिएर फेरमा** (Pierre Fermat) या फ्रेंच गणितज्ञाकडे जाते. फेरमा हा देकार्तचा समकालीन होता. देकार्तच्या कार्यामुळे गणितशास्त्राची प्रगती फार झपाट्याने झाली. पुढे त्याच्या संशोधनाचा आधार घेऊन **न्यूटन** (Newton) आणि **लाइप्नित्स** (Leibnitz) यांनी **फलनशास्त्र** (Calculus) निर्माण केले.]

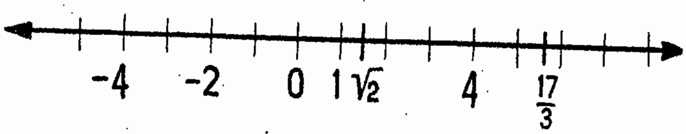
आता आपण निर्देशक भूमितीविषयी प्रारंभिक माहिती मिळवून तिचा उपयोग कसा होतो हे पाहू.

§ 10·2 प्रतलातील निर्देशक पद्धती :

रेषेवर निर्देशक पद्धती कशा दाखवाव्यात याविषयी तुम्ही यापूर्वीच माहिती मिळवली आहे.

दिलेल्या रेषेवर एक निर्देशक पद्धती घेतली की, रेषेवरील प्रत्येक बिंदूशी एक आणि एकच संख्या आणि प्रत्येक संख्येशी एक आणि एकच बिंदू निगडित होतो. रेषेवरील बिंदू आणि संख्या यात एकास एक संगती असते. रेषेवरील बिंदूशी अशा रीतीने निगडित होणाऱ्या संख्येस त्या बिंदूचा 'निर्देशक' म्हणतात.

आता आपल्याला प्रतलात असेच काही करता येईल की काय हे पाहू.



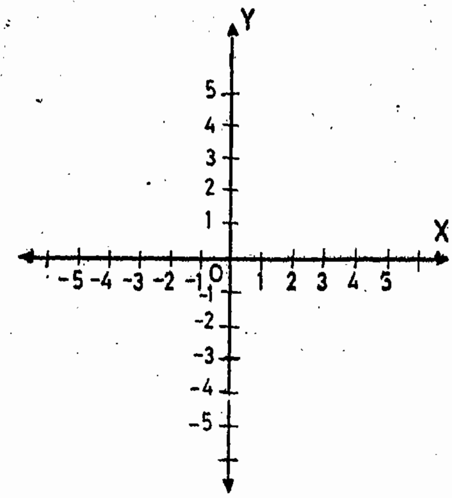
आ. 10·1

आ. 10·1 मधील दिलेल्या प्रतलात एक **आडवी** (Horizontal) रेषा घ्या. ही रेषा दिलेल्या प्रतलाचे वरील आणि खालील अशा दोन अर्धप्रतलात विभाजन करते हे लक्षात घ्या. वरच्या अर्धप्रतलात असणारा बिंदू आडव्या रेषेच्या वरच्या बाजूस आहे असे आपण म्हणू. खालच्या अर्धप्रतलात असणारा बिंदू आडव्या रेषेच्या खालच्या बाजूस आहे असे आपण म्हणू. घेतलेल्या आडव्या रेषेला **X–अक्ष** (X–Axis) असे संबोधू.

दिलेल्या प्रतलात आडव्या रेषेशी लंब असणारी एक उभी (vertical) रेषा घ्या. या उभ्या रेषेला **Y–अक्ष** (Y–Axis) म्हणू. दोन्ही अक्षांचा छेदबिंदू O घ्या. Y–अक्ष दिलेल्या प्रतलास उजव्या आणि

डाव्या अशा दोन अर्धप्रतलात विभागतो. बिंदू O च्या उजव्या बाजूस, X–अक्षावर असलेले बिंदू, बिंदू O च्या **धन बाजूस** (Positive Side) आहेत असे म्हणतात. बिंदू O च्या वरच्या बाजूस Y–अक्षावरील असलेले बिंदू, बिंदू O च्या धन बाजूस आहेत असे म्हणतात. X–अक्षावरील **धनदिशा** (Positive Direction) बिंदू O च्या धन बाजूस आणि Y–अक्षावरील धनदिशा बिंदू O च्या धन बाजूस असते. दोन्ही अक्षांवर धन दिशांच्या विरुद्ध असणाऱ्या दिशा या **ऋण दिशा** (Negative Direction) होत. प्रत्येक अक्षावर योग्य ठिकाणी बाणाची खूण करून धन दिशा दाखवतात.

प्रथम आपण एक निर्देशक पद्धती निवडतो व त्यानुसार X–अक्षावर असे बिंदू घेतो की बिंदू O चा निर्देशक शून्य, बिंदू O च्या उजव्या बाजूला असणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक धन आणि बिंदू O च्या डाव्या बाजूस असणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक ऋण असतील. X–अक्षावरील P आणि Q या कोणत्याही दोन बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे p व q असतील तर $d(P, Q) = |q-p|$.

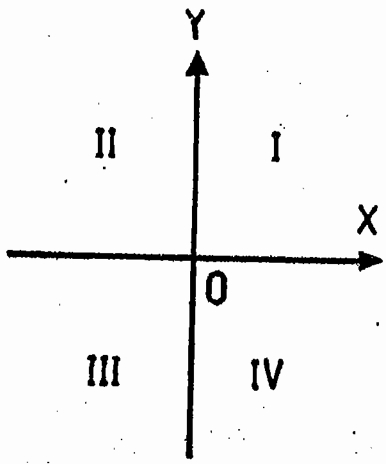


आ. 10·2

यानंतर आपण एका निर्देशक पद्धतीनुसार Y–अक्षावर असे बिंदू घेतो की बिंदू O चा निर्देशक शून्य, बिंदू O च्या वरच्या बाजूस असणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक धन आणि बिंदू O च्या खालच्या बाजूस असणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक ऋण असतील. Y–अक्षावरील R आणि S या कोणत्याही दोन बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे r व s असतील तर $d(R, S) = |s-r|$.

संदर्भाच्या सोयीसाठी X–अक्षावरील निर्देशक पद्धतीस x–निर्देशक पद्धती आणि Y–अक्षावरील निर्देशक पद्धतीस y–निर्देशक पद्धती म्हणतात.

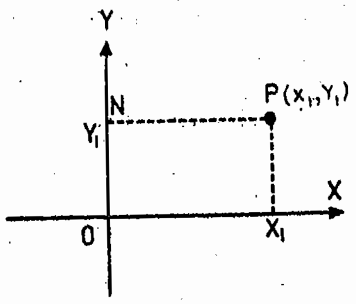
दोन अक्षांमुळे प्रतलाचे चार विभिन्न, बहिर्वक्र संचांत विभाजन होते. यांपैकी प्रत्येकास **चरण** (Quadrant) म्हणतात. वरच्या उजवीकडील चरणास प्रथम चरण, वरच्या डावीकडील चरणास द्वितीय चरण, खालच्या डावीकडील चरणास तृतीय चरण आणि खालच्या उजवीकडील चरणास चतुर्थ चरण म्हणतात (आ. 10·3 पाहा).



आ. 10·3

दोन्ही अक्षांवरील बिंदू कोणत्याही चरणात असत नाहीत ते लक्षात घ्या.

चार चरणांपैकी एका चरणात P बिंदू आहे असे समजा. P बिंदूतून जाणारी Y–अक्षाला समांतर अशी उभी रेषा असेल. ही रेषा X–अक्षावर लंब असणार हे उघड आहे. समजा ही रेषा X–अक्षाला M बिंदूत छेदते आणि M बिंदूचा X–अक्षावरील निर्देशक x_1 आहे. P बिंदूतून जाणारी X–अक्षाला समांतर अशी आडवी रेषा असेल. ही रेषा अर्थातच Y–अक्षावर लंब असेल. समजा ही रेषा Y–अक्षाला N बिंदूत छेदते आणि N बिंदूचा Y–अक्षावरील निर्देशक y_1 आहे (आ. 10·4 पाहा).

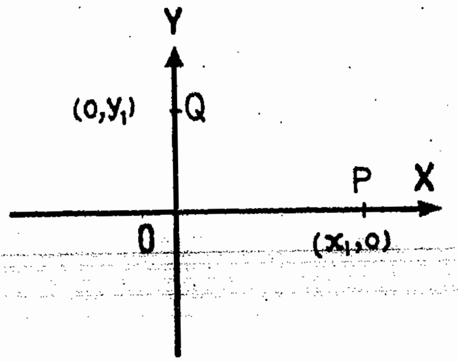


आ. 10·4

आ. 10·4 मधे M बिंदू हा P बिंदूतून X–अक्षावर लंब असलेल्या रेषाखंडाचा लंबपाद आहे; तसेच N बिंदू हा P बिंदूतून Y–अक्षावर लंब असलेल्या रेषाखंडाचा लंबपाद आहे.

P बिंदूतून X–अक्षावर लंब असलेल्या रेषाखंडाच्या लंबपादाचा निर्देशक x_1 यास P बिंदूचा **x–निर्देशक** (x-Coordinate) म्हणतात. P बिंदूतून Y–अक्षावर लंब असलेल्या रेषाखंडाच्या लंबपादाचा निर्देशक y_1 यास P बिंदूचा **y–निर्देशक** (y-Coordinate) म्हणतात, (x_1, y_1) या संख्यांच्या जोडीला P बिंदूचे **कार्तेसीय प्रतलीय निर्देशक** (Cartesian Plane Coordinates) म्हणतात. $(x_1\ y_1)$ ही संख्यांची जोडी P बिंदूचे निर्देशक आहेत असे आपण म्हणतो तेव्हा त्या जोडीत प्रथम येणारी संख्या (येथे x_1) ही P बिंदूचा x–निर्देशक आणि त्या जोडीत नंतर येणारी संख्या (येथे y_1) ही P बिंदूचा y–निर्देशक असते ते चांगले लक्षात घ्या.

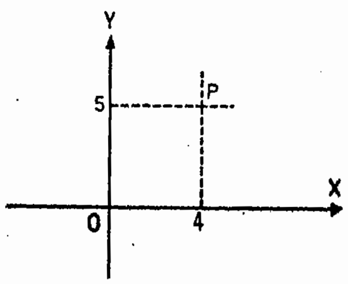
P हा X–अक्षावरील बिंदू असेल तर त्याचा y–निर्देशक शून्य असतो. या बिंदूचा x–निर्देशक x_1 असल्यास त्याचे प्रतलीय निर्देशक $(x_1, 0)$ असतील. Q हा Y–अक्षावरील बिंदू असेल तर त्याचा x–निर्देशक शून्य असतो. येथे y–निर्देशक y_1 असल्यास Q बिंदूचे प्रतलीय निर्देशक $(0, y_1)$ असतील. O या आरंभबिंदूचे कार्तेसीय प्रतलीय निर्देशक (0, 0) असतात (आ. 10·5 पाहा).



आ. 10·5

दोन्ही अक्षांवर घेतलेल्या निर्देशक पद्धतीच्या संदर्भात आता आपल्याला पुढील विधान करता येते. **प्रतलातील प्रत्येक बिंदूशी वास्तव संख्यांची एक आणि एकच जोडी निगडित असते.**

वरील विधानाचा व्यत्यास सत्य आहे काय ? म्हणजेच दिलेल्या निर्देशक पद्धतीनुसार वास्तव संख्यांच्या प्रत्येक जोडीशी एक आणि एकच बिंदू निगडित असतो काय ?

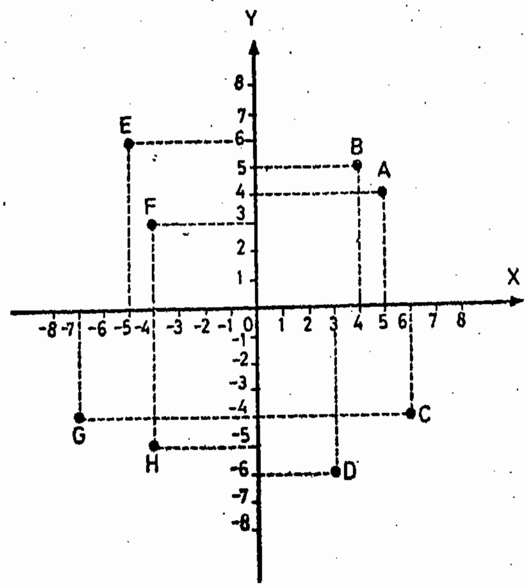


आ. 10·6

समजा (4, 5) ही वास्तव संख्यांची दिलेली जोडी आहे. ज्याचा x–निर्देशक 4 आहे असा एक बिंदू X–अक्षावर घ्या. या बिंदूतून X–अक्षावर लंब काढा. ज्याचा y–निर्देशक 5 आहे असा एक बिंदू Y–अक्षावर घ्या. या बिंदूतून Y–अक्षावर लंब काढा. X आणि Y–अक्षांवरील लंब रेषा परस्परांना फक्त एकाच बिंदूत छेदतील. यावरून **दिलेल्या निर्देशन पद्धतीनुसार वास्तव संख्यांच्या एका जोडीशी एक आणि एकच बिंदू निगडित असतो** हे यावरून स्पष्ट होते.

वरील दोन्ही विधाने एकत्र करून सांगावयाचे झाल्यास असे म्हणता येते की आडव्या आणि उभ्या अक्षांच्या संदर्भात, प्रतलातील बिंदू आणि वास्तव संख्यांच्या जोड्या यांमध्ये एकास-एक संगती असते. आडव्या व उभ्या अक्षांना आपण निर्देशक चौकट (frame of reference) म्हणू. दोन्ही अक्षांचा

छेदबिंदू O यास **आरंभबिंदू** (Origin) म्हणतात. X आणि Y–अक्षांवर घेतलेल्या निर्देशक पद्धतीमुळे आपणास प्रतलातील निर्देशक पद्धती मिळते. या निर्देशक पद्धतीसच **कार्तेसीय प्रतलीय निर्देशक पद्धती** (Cartesian Plane Coordinate System) म्हणतात.



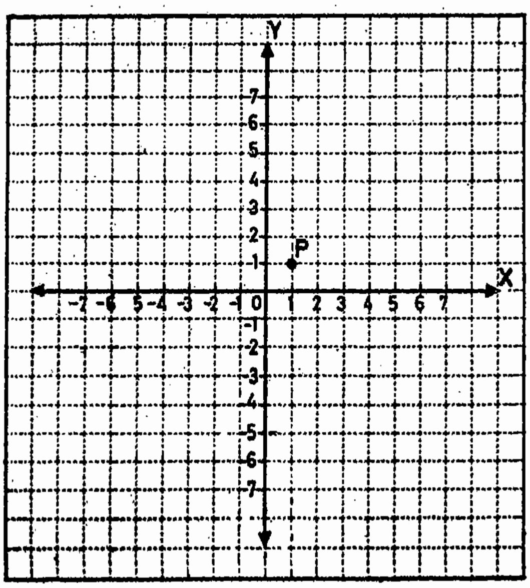
आ. 10·7

आ. 10·7 मधील (4, 5) हे निर्देशक असलेला बिंदू आणि (5, 4) हे निर्देशक असलेला बिंदू हे भिन्न बिंदू आहेत. यावरून निर्देशक लिहिताना संख्यांच्या जोडीतील क्रमाला महत्त्व आहे हे तुमच्या लक्षात येईल. कोणत्याही बिंदूचे निर्देशक म्हणजे वास्तव संख्यांची एक जोडी होय. दिलेला बिंदू नेमका कुठे आहे हे कळण्यासाठी या जोडीमधील कोणती संख्या अगोदर आली हे कळणे जरुरी आहे. बिंदूचे निर्देशक लिहिताना प्रथम x–निर्देशक आणि नंतर y–निर्देशक असा क्रम ठेवण्याची प्रथा आहे.

P(3, 4) याचा अर्थ P हा असा बिंदू आहे की ज्याचा x–निर्देशक 3 आणि y–निर्देशक 4 आहे. बिंदू Q चा x–निर्देशक 5 आणि y–निर्देशक –7 असेल तर हे थोडक्यात Q (5, –7) असे लिहितात. P(3, 4) हे P = (3, 4) असेही लिहितात. बिंदू P चा x–निर्देशक 7 आणि y–निर्देशक –3 असेल तर हे थोडक्यात कसे लिहाल? P (–5, 8) याचा अर्थ काय आहे? आ. 10·7 मधील काही बिंदूंचे निर्देशक खाली थोडक्यात लिहून दाखवले आहेत.

A (5, 4), C (6, –4), E (–5, 6), H (–4, –5) B, D, F आणि G या बिंदूंचे निर्देशक सांगा.

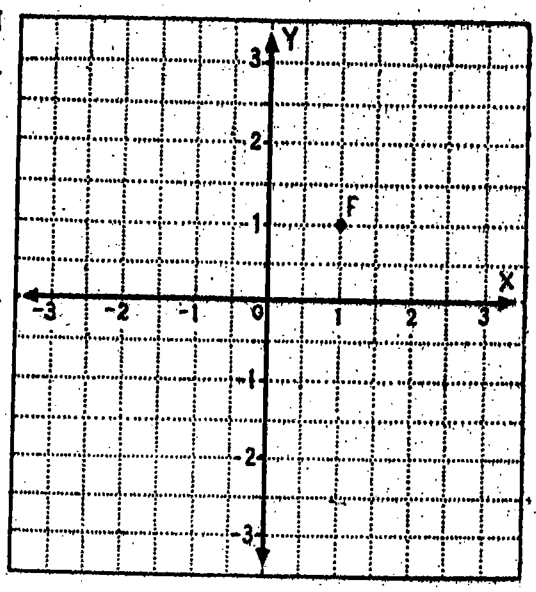
§ 10·3 आलेखकागदावर बिंदूंची स्थापना :



आ. 10·8

निर्देशक भूमितीतील आकृती काढण्यासाठी बहुधा आलेखकागदाचा वापर केला जातो. आलेखकागदावर आडव्या आणि यांच्याशी लंब असलेल्या उभ्या रेषा काढलेल्या असतात. बाजूच्या आकृतीत, आलेखकागदावर छापलेल्या रेषा, तुटक रेषांनी दाखवल्या आहेत. पेन्सिल किंवा पेनने X– तसेच Y–अक्ष आपणास काढावे लागतात. आडव्या अक्षावर येणारे निर्देशक x ने दाखवले जातील हे समजावे म्हणून या रेषेवर काढलेल्या बाणाच्या टोकाजवळ X हे अक्षर लिहिले जाते. दुसऱ्या अक्षावरील बाणाच्या टोकाजवळ Y हे अक्षर लिहिले जाते. या अक्षावरील निर्देशक y ने दाखवतात. X तसेच Y–अक्ष काढल्यानंतर अंतराचे परिमाण ठरवून दोन्ही अक्षांवर आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे

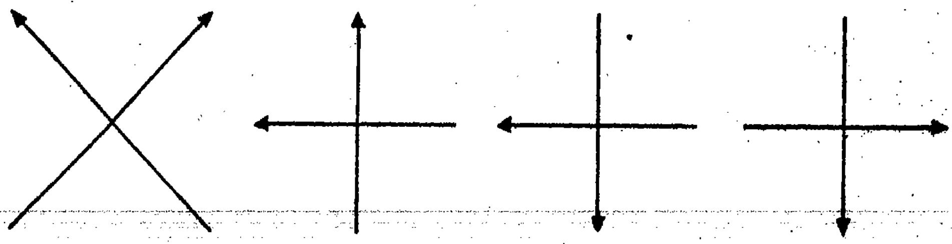
बिंदू घ्यावेत. अंतराचे परिमाण नेहमी तेच घेतले पाहिजे असे बंधन नाही. आ. 10·8 मध्ये X – तसेच Y – अक्षावर घेतलेले बिंदू खालीलप्रमाणेही घेता येतील.



आ. 10·9

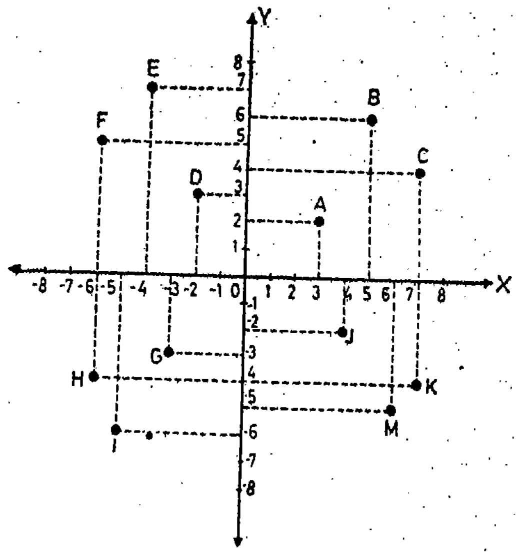
याचा अर्थ आकृती काढताना आपण सोयीस्कर असे कोणतेही प्रमाण घेऊ शकतो. पण प्रमाण निश्चित केल्यानंतर त्यानुसार X तसेच Y – अक्षावर बिंदू दाखवणे आवश्यक ठरते. अन्यथा आ. 10·8 मधे बिंदू P हा (1, 1) आहे की (2, 2) हे वाचकास सांगता येणार नाही.

आ. 10·8 तसेच आ. 10·9 मधे X व Y – अक्ष एका विशिष्ट पद्धतीने घेऊन दाखवले आहेत. अक्ष नेहमी याच पद्धतीने घेतले पाहिजेत असे नाही. खालीलपैकी कोणत्याही पद्धतीने अक्ष घेता येतील.



आ. 10·10

पण अक्ष घेण्याची पद्धत आपण बदलत गेलो किंवा निरनिराळ्या व्यक्तींनी निरनिराळ्या पद्धतीने अक्ष घेतले तर आलेख वाचणे सोपे राहणार नाही. म्हणून X – अक्ष हा आडवा घ्यावा आणि त्यावर डावीकडून उजवीकडे चढते निर्देशक असणारे बिंदू घ्यावेत. X – अक्षावरील O बिंदूतून त्याला लंब असणारी रेषा Y – अक्ष म्हणून घ्यावी आणि या अक्षावर खालून वर चढते निर्देशक असणारे बिंदू घ्यावेत. X आणि Y – अक्षांवर O बिंदू हा एकच असावा या प्रथेचे पालन करणे आलेख-वाचन सोपे ठरण्याच्या दृष्टीने योग्य होय. आपण यापुढे याच पद्धतीचा अवलंब करू.

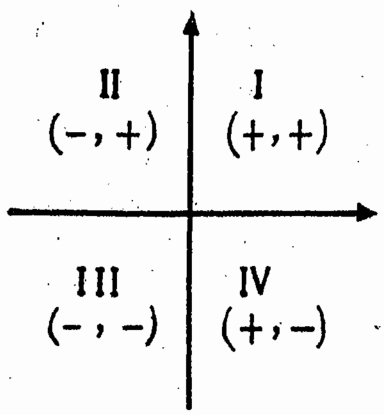


आ. 10·11

आतापर्यंत दिलेल्या निर्देशकांवरून आलेख-कागदावर बिंदू कसा स्थापावा आणि दिलेल्या बिंदूचे निर्देशक कसे सांगावेत हे तुम्ही शिकला आहात. आ. 10·11 मधील बिंदूंचे निर्देशक सांगा.

प्रथम, द्वितीय, तृतीय तसेच चतुर्थ चरणातील बिंदू कोणते? प्रत्येक चरणातील बिंदूंचे निर्देशक पुढील तक्त्यात लिहून तक्ता पूर्ण करा.

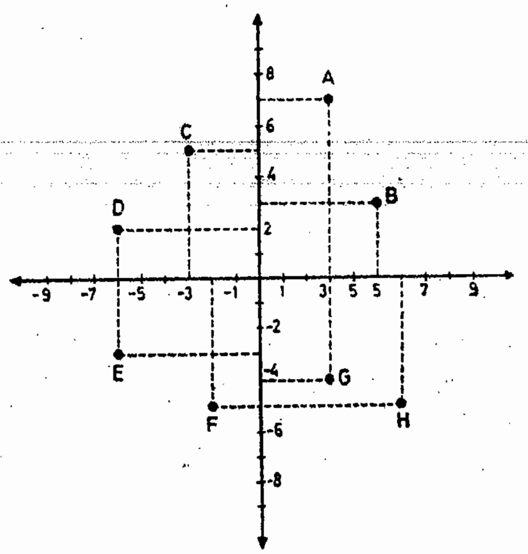
बिंदूंचे निर्देशक			
प्रथम चरण	द्‌वितीय चरण	तृतीय चरण	चतुर्थ चरण
A (3, 2) B (..., 6) C (..., ...)	D (−2, ...) E (−4, 7) F (..., ...)	G (−3, −3) H (..., −4) I (..., ...)	J (..., −2) K (..., ...) M (6, −5)



आ. 10·12

यावरून विविध चरणांतील बिंदूंच्या x तसेच y−निर्देशकांच्या चिन्हांविषयी काय सांगता येईल? आ. 10·12 मधे प्रत्येक चरणात असणाऱ्या बिंदूंच्या निर्देशकांची केवळ चिन्हे दाखवली आहेत. हे बरोबर असल्याची खात्री करून घ्या.

एखादा बिंदू कोणत्या चरणात आहे हे सांगितले तर त्या बिंदूच्या x तसेच y−निर्देशकांची चिन्हे आपण सांगू शकतो. एखादया बिंदूच्या x तसेच y−निर्देशकांची चिन्हे कळली तर तो बिंदू कोणत्या चरणात आहे हे आपण सांगू शकतो.

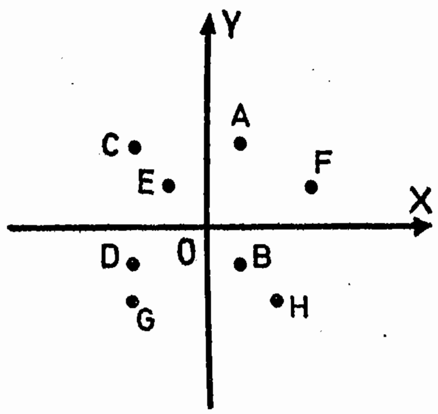


आ. 10·13

§ 10·4 प्रश्न :

1. आ. 10·13 मधील प्रत्येक बिंदूचे निर्देशक सांगा.

2. आकृती 10·14 मधील कोणते बिंदू, चरण IV मधे आणि कोणते चरण II मधे आहेत ?



आ. 10·14

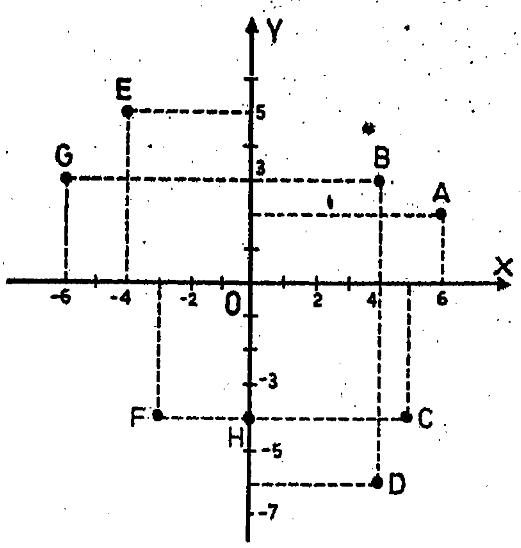
3. आरंभ बिंदूचे निर्देशक सांगा.

4. पुढील बिंदूंचे y−निर्देशक सांगा : A (0, 3), B (2, −5), C (−3, 0), D (−5, −8)

5. पुढील बिंदूंपैकी प्रत्येक बिंदू कोणत्या चरणात येतो हे सांगा : A (3, 4), B (5, −3), C (−3, −5), D (4, 6), E (−3, 5), F (−4, −3), G (−5, 3), H (3, −5).

6. आ. 10·15 मधील कोणते तीन बिंदू एकरेषीय आहेत? या बिंदूचे निर्देशक सांगा.

7. m ही धन संख्या आणि n ही ऋण संख्या असेल तर पुढील बिंदूंपैकी प्रत्येक बिंदू, कोणत्या चरणात येतो हे सांगा : A $(m, -n)$, B (m, n), C $(-m, -n)$, D $(-m, n)$, E (n, m), F $(-n, m)$, G $(n, -m)$, H $(-n, -m)$.



आ. 10·15

8. X–अक्षावरील कोणत्याही बिंदूचा y–निर्देशक काय असतो?

9. Y–अक्षावरील कोणत्याही बिंदूचा x–निर्देशक काय असतो?

10. पुढील बिंदूंपैकी कोणता बिंदू आरंभबिंदूच्या जास्त जवळ आहे? : (0, 3), (0, –2)

11. पुढील बिंदूंतून X–अक्षावर टाकलेल्या लंबांच्या पादबिंदूंचे निर्देशक काय असतील? : A (4, 7), B (–3, 5), C (5, –3), D (0, –9)

12. पुढील बिंदूंतून Y–अक्षावर टाकलेल्या लंबांच्या पादबिंदूंचे निर्देशक काय असतील? : P (–3, –6), Q (4, –7), R (–5, –9)

13. पुढीलपैकी कोणत्या जोडीतील बिंदू एकमेकांच्या जास्त जवळ आहेत? : (i) (3, 2) आणि (3, –4) (ii) (–5, –7) आणि (4, –7)

14. दोन्ही अक्ष आणि (4, 7) या बिंदूतून त्यांच्यावर टाकलेल्या लंबांमुळे जो आयत तयार होतो त्याची परिमिती किती असेल?

15. A, B, C आणि D हे खालील बिंदूंतून X–अक्षावर टाकलेल्या लंबांचे अनुक्रमे पाद आहेत. या लंबपादांची नावे डावीकडून उजवीकडे क्रमाने येतील अशी लिहा. : (3, –5), (–2, 5), (6, 3), (–5, 7).

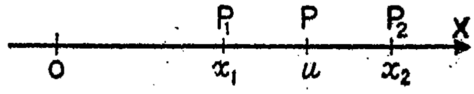
§ 10·5 दिलेल्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक :

दिलेल्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंचे निर्देशक माहीत असतील तर त्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक कसे काढावेत हे आता आपण पाहू.

मध्यबिंदूचे सूत्र

प्रथम आपण विशिष्ट रेषाखंड विचारात घेऊ.

समजा रेख $P_1 P_2$ हा X–अक्षावरील रेषाखंड असून या रेषाखंडाचा मध्यबिंदू P आहे. P_1, P आणि P_2 या बिंदूंचे x–निर्देशक अनुक्रमे x_1 u आणि x_2 आहेत. $x_1 < x_2$ (आ. 10·16 पाहा).



आ. 10·16

P बिंदूचा x–निर्देशक, P_1 आणि P_2 बिंदूंच्या x–निर्देशकांवरून ठरवायचा आहे. म्हणजेच u आणि x_1 व x_2 यांतील संबंध शोधायचा आहे.

$$x_1 < x_2$$

$$\therefore d(P_1, P) = u - x_1 \text{ आणि } d(P, P_2) = x_2 - u$$

परंतु P हा रेख $P_1 P_2$ चा मध्यबिंदू आहे.

$$\therefore d(P_1, P) = d(P, P_2) \quad \therefore u - x_1 = x_2 - u \quad \therefore u = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



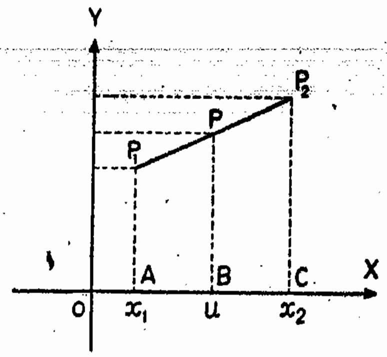
आ. 10·17

(या सूत्रात x_1 व x_2 कोणत्याही धन अथवा ऋण वास्तव संख्या असू शकतात. $x_2 < x_1$ असले तरीही सूत्र $u = \frac{x_1 + x_2}{2}$ असेच राहील. x_1 आणि x_2 ची अदलाबदल केल्यानेही प्रश्नाचे स्वरूप बदलत नाही.)

आता समजा रेख $P_1 P_2$ हा Y–अक्षावरील रेषाखंड आहे आणि या रेषाखंडाचा मध्यबिंदू P आहे. P_1, P आणि P_2 बिंदूचे x–निर्देशक अनुक्रमे y_1, v आणि y_2 आहेत; आणि $y_1 < y_2$ (आ 10·17 पाहा).

वरील पद्धतीने हे दाखवता येईल की, $v = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

आता आपल्याला कोणत्याही रेषाखंडाचा विचार करता येईल.



आ. 10·18

समजा, रेख P_1P_2 हा दिलेला रेषाखंड असून या रेषाखंडाचा मध्यबिंदू P आहे. समजा P_1, P व P_2 ह्यांचे निर्देशक अनुक्रमे (x_1, y_1), (u, v) व (x_2, y_2) आहेत. P_1, P आणि P_2 या बिंदूंतून X–अक्षावर लंब काढा. समजा ह्या लंबरेषा X–अक्षाला अनुक्रमे A, B व C बिंदूंत छेदतात. P_1, P व P_2 ह्यांचे x–निर्देशक अनुक्रमे x_1, u व x_2 असल्यामुळे A, B आणि C बिंदूंचे x–निर्देशक अनुक्रमे x_1, u आणि x_2 आहेत.

रेषा P_1A, रेषा PB आणि रेषा P_2C समांतर आहेत (कारण सांगा); आणि P हा रेख P_1P_2 चा मध्यबिंदू आहे.

$\therefore$ बिंदू B हा रेख AC चा मध्यबिंदू आहे.

$$\therefore u = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

याच पद्धतीने $v = \frac{y_1 + y_2}{2}$ हेही दाखवता येईल.

याचा सारांश खालील प्रमेयात मांडू.

■ **प्रमेय :**

P_1 बिंदूचे निर्देशक (x_1, y_1) आणि P_2 बिंदूचे निर्देशक (x_2, y_2) असतील, तर रेख $P_1 P_2$ च्या मध्यबिंदू P चे निर्देशक $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ असतात.

खालील उदाहरण पाहा.

उदा० : रेख AB चा मध्यबिंदू C आहे. A आणि B बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे (3, 6) आणि (5, 8) असतील तर C बिंदूंचे निर्देशक काढा.

C बिंदूचे निर्देशक : $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{6+8}{2}\right) = (4, 7)$.

§ 10·6 दिलेल्या रेषाखंडास दिलेल्या गुणोत्तरात विभागणारा बिंदू :

दिलेल्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक कसे काढावेत हे पाहिल्यानंतर त्याच पद्धतीने दिलेल्या रेषाखंडास दिलेल्या गुणोत्तरात विभागणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक कसे काढावेत हे आपल्याला पाहता येईल.

पण अगोदर दिलेल्या रेषाखंडास दिलेल्या गुणोत्तरात विभागणारा बिंदू म्हणजे काय हे समजले पाहिजे.

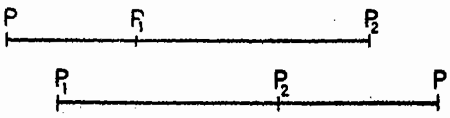
समजा P बिंदू हा रेख $P_1 P_2$ मधे समाविष्ट आहे. अर्थात् P, P_1 व P_2 ह्यांच्या दरम्यान आहे. (P_1 — P — P_2. आ. 10·19 पाहा).



आ. 10·19

या स्थितीत P बिंदू हा रेख $P_1 P_2$ चे $\frac{l(P_1 P)}{l(P P_2)}$ या गुणोत्तरात **आंतरविभाजन** (Divides Internally) करतो असे म्हणतात. येथे P बिंदूला रेख $P_1 P_2$ चा **आंतर विभाजक बिंदू** (Point of Internal Division) म्हणतात.

आता समजा बिंदू P हा रेख P_1 P_2 च्या बाहेर आहे; पण रेख P_1 P_2 समाविष्ट करणाऱ्या रेषेवर आहे. (P – P_1 – P_2 किंवा P_1 – P_2 – P. आ. 10·20 पाहा). या दोन्ही स्थितींत P बिंदू हा रेख P_1 P_2 ला $\frac{l(P_1 P)}{l(P P_2)}$ या गुणोत्तरात **बाह्यतः विभागतो** (Divides Externally) असे म्हणतात. येथे P बिंदूला रेख P_1 P_2 चा **बाह्य विभाजक बिंदू** (Point of External Division) म्हणतात.



आ. 10·20

या संदर्भात एक मुद्दा लक्षात घ्यावा. एखादा बिंदू दिलेल्या रेषाखंडास बाह्यतः विभागतो तेव्हा विभाजन गुणोत्तर 'ऋण' समजण्याची प्रथा आहे. विभाजन गुणोत्तर ऋण आहे. याचा अर्थ विभाजन करणारा बिंदू दिलेल्या रेषाखंडाच्या बिंदूंपैकी नसून दिलेला रेषाखंड समाविष्ट करणाऱ्या रेषेवर आहे म्हणजे तो बिंदू रेषेवरच पण दिलेल्या रेषाखंडाच्या बाहेर आहे.

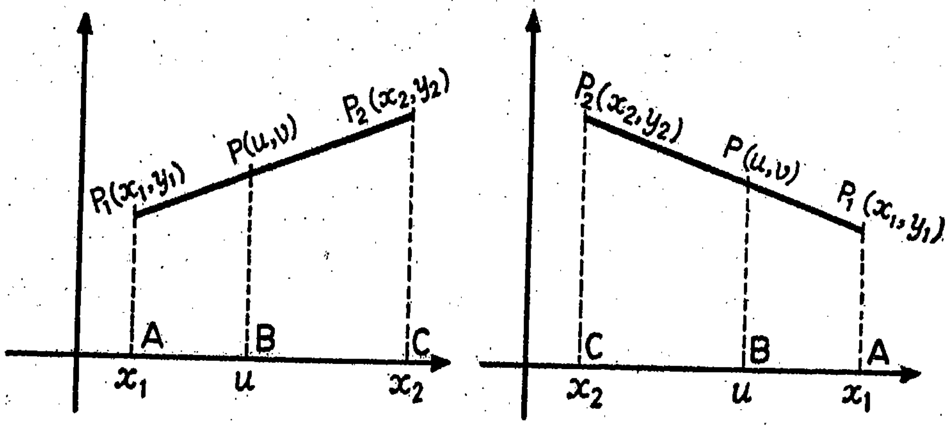
§ 10·7 दिलेल्या रेषाखंडास दिलेल्या गुणोत्तरात विभागणाऱ्या आंतरविभाजक बिंदूचे निर्देशक :

समजा P_1 आणि P_2 हे दोन बिंदू असून त्यांचे निर्देशक अनुक्रमे (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) आहेत. बिंदू P हा रेख P_1 P_2 चे $m : n$ या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करतो; म्हणजेच $\frac{l(P_1 P)}{l(P P_2)} = \frac{m}{n}$.

P बिंदूचे निर्देशक (u, v) आहेत असे मानू. बिंदू P_1, P आणि P_2 मधून X – अक्षावर लंब काढा. समजा या लंबांचे पाद अनुक्रमे बिंदू A, B आणि C आहेत (आ. 10·21 पाहा).

A, B आणि C बिंदूंचे x – निर्देशक अनुक्रमे x_1, u आणि x_2 होतील. (का?) ज्या अर्थी बिंदू P हा बिंदू P_1 व P_2 यांच्या दरम्यान आहे त्या अर्थी बिंदू B हा बिंदू A व C च्या दरम्यान असेल. म्हणून (i) $x_1 < u$ आणि $u < x_2$ किंवा (ii) $x_2 < u$ आणि $u < x_1$.

प्रथम आपण $x_1 < u < x_2$ असे मानू (आ. 10·21 (a) पाहा).



(a) आ. 10·21 (b)

आता रेषा P_1A, रेषा PB आणि रेषा P_2C समांतर असून (का?) रेषा P_1P_2 आणि X−अक्ष या त्यांच्या छेदिका आहेत. समांतर रेषांच्या गुणधर्मानुसार रेषा P_1A, रेषा PB आणि रेषा P_2C मुळे होणारे छेदिकांवरील आंतरखंड प्रमाणात असतात.

$$\therefore \frac{l(P_1P)}{l(PP_2)} = \frac{l(AB)}{l(BC)}$$

परंतु $\frac{l(P_1P)}{l(PP_2)} = \frac{m}{n} \quad \therefore \frac{l(AB)}{l(BC)} = \frac{m}{n}$

आता $l(AB) = u - x_1$ आणि $l(BC) = x_2 - u$

$$\therefore \frac{u-x_1}{x_2-u} = \frac{m}{n} \quad \therefore n(u-x_1) = m(x_2-u)$$

$$\therefore nu - nx_1 = mx_2 - mu \quad \therefore mu + nu = mx_2 + nx_1$$

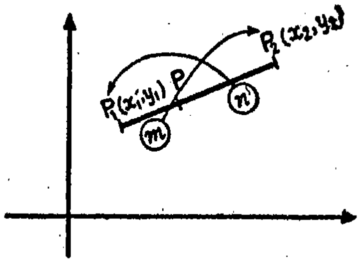
$$\therefore u(m+n) = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore u = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

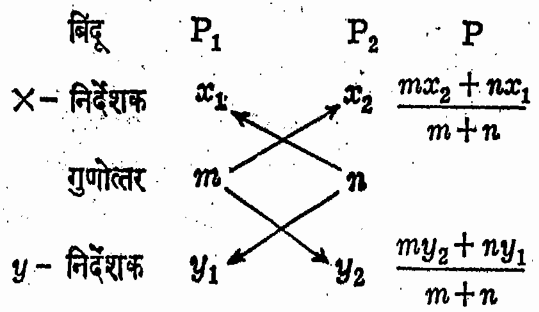
$x_2 < u < x_1$ असेल (आ. 10·21 (b) पाहा.) तर $l(AB) = x_1 - u$ आणि $l(BC) = u - x_2$. परंतु यामुळे अंतिम सूत्र बदलत नाही.

याच पद्धतीने दाखवता येईल की, $v = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$

दिलेल्या रेषाखंडाच्या कोणत्या अंत्यबिंदूच्या निर्देशकाशी m व n चा संबंध जोडायचा हे एकदा समजले की वरील सूत्र हाताळणे सोपे होईल. बाजूच्या आकृतीवरून हा मुद्दा स्पष्ट होईल (पुढील तक्ता पाहा).



आ. 10·22



आता आपल्याला खालील प्रमेय मांडता येईल.

■ **प्रमेय :**

P बिंदू, P_1 आणि P_2 बिंदूंच्यामधे असेल, P_1 बिंदूचे निर्देशक (x_1, y_1), P_2 बिंदूचे निर्देशक (x_2, y_2) आणि P बिंदू, रेख P_1P_2 ला ज्या गुणोत्तरात विभागतो ते गुणोत्तर $m:n$ असेल; म्हणजेच $\frac{l(P_1P)}{l(PP_2)} = \frac{m}{n}$ असेल, तर P बिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$ असतात.

P बिंदू, रेख P_1 P_2 ची बाह्यतः विभागणी करीत असेल तरीही P बिंदूचे निर्देशक वरील प्रमेयात दिल्यानुसारच असतात हे फक्त लक्षात असू द्या.

दिलेल्या रेषाखंडास दिलेल्या गुणोत्तरात विभागणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक सांगणे सोपे आहे हे आता तुमच्या लक्षात आले असेल. खालील उदाहरण पाहा.

उदा० : $P_1(3, 4)$ आणि $P_2(6, 9)$ हे रेख P_1P_2 चे अंत्यबिंदू आहेत. या रेषाखंडाचे 2 : 3 या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करणाऱ्या P बिंदूचे निर्देशक काढा.

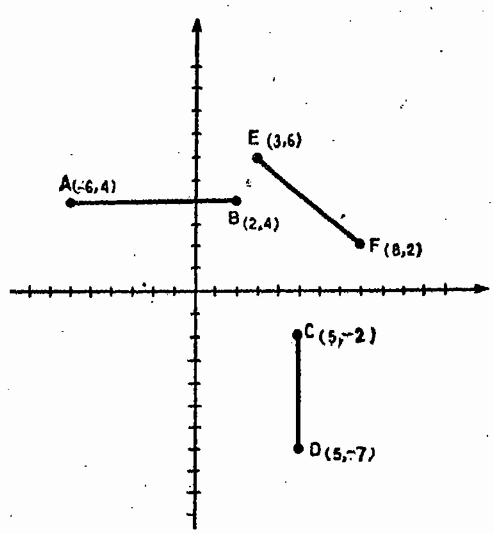
P_1 बिंदूचे निर्देशक (3, 4), P_2 बिंदूचे निर्देशक (6, 9), आणि $\frac{l(P_1P)}{l(PP_2)} = \frac{2}{3}$ दिले आहे.

∴ P बिंदूचे निर्देशक

$$\left(\frac{2\times6+3\times3}{2+3}, \frac{2\times9+3\times4}{2+3}\right) = \left(\frac{21}{5}, 6\right) \text{ किंवा } (4{\cdot}2, 6)$$

§ 10·8 प्रश्न :

1. आ. 10·23 मधे दिलेल्या प्रत्येक रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक सांगा.
2. खालील प्रत्येक जोडीतील बिंदूंना सांधणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढा.
   (a) (0, 0) आणि (0, 1), (b) (0, 0) आणि (8, 0), (c) (2, 0) आणि (0, 2), (d) (0, 12) आणि (8, 0).
3. बिंदू M, रेख PQ चा मध्यबिंदू आहे P बिंदूचे निर्देशक (3, –4) आणि Q बिंदूचे निर्देशक (4, – 2) आहेत. खालील विधानातील मोकळी जागा भरा. M बिंदूचे निर्देशक (..., –3) आहेत.



आ. 10·23

4. खालीलपैकी प्रत्येक जोडीतील बिंदूंना सांधणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक सांगा. :
(a) $(4, 7)$ आणि $(6, 9)$, (b) $(-2, 5)$ आणि $(-2, 7)$, (c) $(6, -3)$ आणि $(4, -7)$, (d) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ आणि $(1, \frac{2}{3})$, (e) $(-4, -3)$ आणि $(-5, -\frac{8}{2})$, (f) $(\sqrt{2}, 1)$ आणि $(2, \sqrt{3})$.

5. ज्याचे अंत्यबिंदू A $(r-s, r+s)$ आणि B (r, s) आहेत अशा रेषाखंडाचा मध्यबिंदू C आहे. C बिंदूचे निर्देशक खालीलपैकी एक आहेत. उत्तरामागील क्रमसंख्या बरोबर सांगा :
(i) $\left(\frac{r-s}{2}, \frac{r+s}{2}\right)$ (ii) $\left(r-\frac{s}{2}, \frac{r}{2}+s\right)$
(iii) $\left(\frac{r}{2}-s, \frac{r}{2}+s\right)$ (iv) $\left(r-\frac{s}{2}, r+\frac{s}{2}\right)$.

6. रेख PF चा मध्यबिंदू D आहे. P आणि D बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे $(4, 7)$ आणि $(5, 6)$ आहेत. F बिंदूचे निर्देशक सांगा.

7. $P(5, 7)$, $Q(7, 9)$, $P-R-Q$ आणि $\frac{l(PR)}{l(RQ)} = \frac{1}{2}$ दिले आहे. R बिंदूचे निर्देशक काढा.

8. R व T बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे $(-3, 5)$ आणि $(6, -3)$ आहेत. या रेषाखंडास खालील गुणोत्तरास विभागणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक काढा. (a) $2:1$ (b) $3:4$ (c) $4:1$

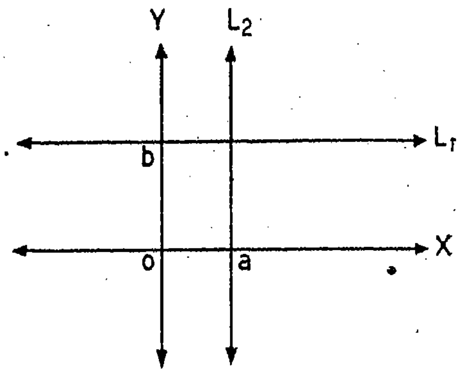
9. A $(4, 5)$ आणि D $(6, 7)$ हे एका रेषाखंडाचे अंत्यबिंदू आहेत. बिंदू B व C मुळे या रेषाखंडाचे तीन एकरूप भाग होत असतील तर B व C बिंदूंचे निर्देशक काढा.

10. A $(0, 0)$, B $(5, 1)$, C $(8, 4)$ आणि D $(3, 3)$ हे एका समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत. कर्ण AC आणि कर्ण BD च्या मध्यबिंदूचे निर्देशक तेच आहेत हे दाखवा.

11. $P_1(7, a)$ आणि $P_2(b, 6)$ हे एका रेषाखंडाचे अंत्यबिंदू आहेत. P हा या रेषाखंडाचा मध्यबिंदू आहे. P बिंदूचे निर्देशक $(3, 5)$ असल्यास a व b च्या किंमती काढा.

§ 10·9 उभ्या नसलेल्या रेषेचा चढ :

X – अक्ष आणि त्याला समांतर असलेल्या सर्व रेषा या आडव्या रेषा (horizontal lines) होत. Y – अक्ष आणि त्याला समांतर असलेल्या सर्व रेषा या उभ्या रेषा (vertical lines) होत.



आ. 10·24

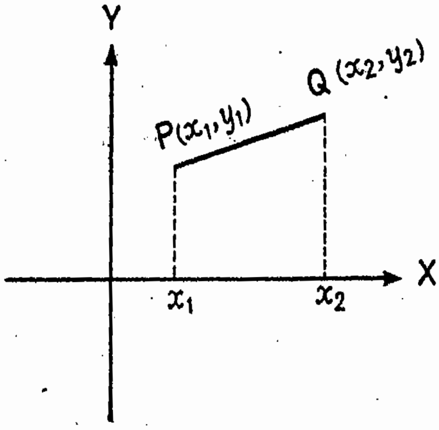
समजा L_1 ही X – अक्षाला समांतर असलेली एक रेषा आहे व ही रेषा Y – अक्षाला ज्या बिंदूत छेदते त्या बिंदूचे निर्देशक $(0, b)$ आहेत. रेषा L_1 ही Y – अक्षावर लंब आहे. म्हणून या रेषेवरील कोणत्याही बिंदूतून Y – अक्षावर टाकलेल्या लंबाच्या पादबिंदूचे निर्देशक $(0, b)$ हेच असतील. अर्थात रेषा L_1 वरील प्रत्येक बिंदूचा y – निर्देशक b आहे. समजा L_2 ही Y – अक्षाला समांतर असलेली एक रेषा आहे व ही रेषा X – अक्षाला ज्या बिंदूत छेदते त्या बिंदूचे निर्देशक $(a, 0)$ आहेत. रेषा L_2 ही Y – अक्षाला समांतर असल्यामुळे X – अक्षावर लंब असेल म्हणून या रेषेवरील कोणत्याही बिंदूतून X – अक्षावर टाकलेल्या लंबाच्या पादबिंदूचे निर्देशक $(a, 0)$ हेच असतील. अर्थात रेषा L_2 वरील प्रत्येक बिंदूचा x – निर्देशक a आहे.

ज्या रेषाखंडास समाविष्ट करणारी रेषा आडवी असते तो आडवा रेषाखंड आणि ज्या रेषाखंडास समाविष्ट करणारी रेषा उभी असते तो उभा रेषाखंड होय.

समजा रेख PQ हा उभा नसलेला रेषाखंड आहे. P बिंदूचे निर्देशक (x_1, y_1) आणि Q बिंदूचे निर्देशक (x_2, y_2) आहेत. आता आपण रेख PQ चा चढ (slope) याची व्याख्या देऊ.

व्याख्या :

रेख PQ हा उभा नसलेला रेषाखंड असून P बिंदूचे निर्देशक $(x_1\ y_1)$ आणि Q बिंदूचे निर्देशक (x_2, y_2) असतील तर $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ह्या संख्येला रेख PQ चा चढ म्हणतात.



आ. 10·25

रेख PQ उभा नसलेला रेषाखंड असल्यामुळे P आणि Q बिंदूचे x-निर्देशक एकच असणार नाहीत. म्हणून $x_2 - x_1$ ची किंमत शून्य असणार नाही.

आणि म्हणून $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ हे गुणोत्तर म्हणजे एक वास्तव संख्या असते. यावरून प्रत्येक उभ्या नसलेल्या रेषाखंडाला चढ असतो असे म्हणता येते.

§ 10·10 आता रेषाखंडाच्या चढाविषयी खालील गोष्टी लक्षात घ्या.

1. समजा रेख PQ हा उभा नसलेला एक रेषाखंड असून P बिंदूचे निर्देशक (5, 8) आणि Q बिंदूचे निर्देशक (3, 7) आहेत. रेख PQ चा चढ किती आहे?

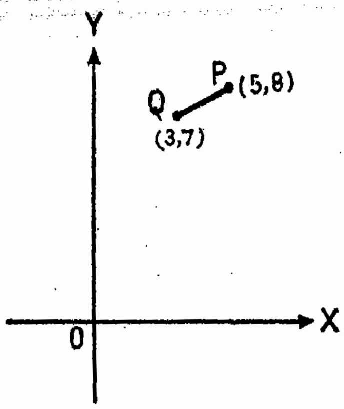
आपण चढ m ह्या अक्षराने दाखवू.

$$\therefore \text{चढ}, m = \frac{8-7}{5-3} = \frac{1}{2}$$

येथे चढ काढताना अंश तसेच छेदात प्रथम Q बिंदूचे निर्देशक आणि नंतर P बिंदूचे निर्देशक घेतले आहेत.

रेख PQ व रेख QP एकच असल्यामुळे चढ काढताना अंश तसेच छेदात प्रथम P बिंदूचे निर्देशक आणि नंतर Q बिंदूचे निर्देशक घेतले असता काय होते हे पाहू.

$$\text{चढ}\ m = \frac{7-8}{3-5} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$



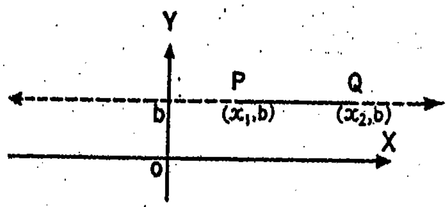
आ. 10·26

याचा अर्थ असा की दिलेल्या रेषाखंडाचे नाव PQ किंवा QP कसेही घेतले तरी चढ तोच येतो. येथे हे लक्षात ठेवणे महत्त्वाचे आहे की चढ काढताना रेषाखंडाच्या ज्या अंत्यबिंदूचा y-निर्देशक अंशस्थानी प्रथम घेतला असेल त्याच अंत्यबिंदूचा x-निर्देशक छेदस्थानी प्रथम घेतला पाहिजे.

रेख PQ चा चढ $m = \frac{8-7}{5-3}$ किंवा $\frac{7-8}{3-5}$. बीजगणितावरूनही आपण जाणतो की, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$. म्हणजे रेषाखंडाचा चढ रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंच्या निर्देशकांवर अवलंबून असतो; रेषाखंडाचे नाव कसे लिहिले आहे यावर तो अवलंबून नसतो.

2. आडव्या आणि उभ्या रेषाखंडांना चढ नसतो असे आपण म्हणतो. आडव्या रेषाखंडास चढ नसतो असे आपण म्हणतो तेव्हा अशा रेषाखंडाचा चढ शून्य असतो असा त्याचा अर्थ होतो.

समजा रेख PQ हा एक आडवा रेषाखंड असून हा रेषाखंड समाविष्ट करणारी रेषा Y – अक्षाला $(0, b)$ या बिंदूत छेदते. या स्थितीत P आणि Q बिंदूंचे y – निर्देशक काय असतील ?

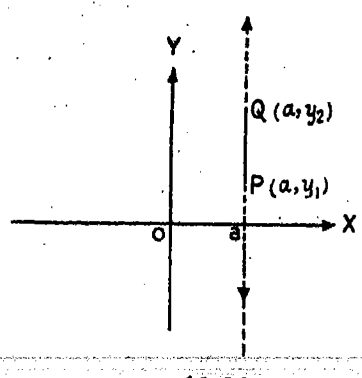


आ. 10·27

P आणि Q बिंदूंचे x – निर्देशक अनुक्रमे x_1 आणि x_2 आहेत असे समजा. व्याख्येनुसार रेख PQ चा चढ $= \dfrac{b-b}{x_2-x_1}$ किंवा $\dfrac{b-b}{x_1-x_2} = 0.$

अर्थात आडव्या रेषाखंडाचा चढ शून्य असतो.

हे स्वाभाविक नव्हे काय ? कारण आडव्या रेषेला किंवा आडव्या रेषाखंडाला चढ किंवा उतार नसतो.



आ. 10·28

उभ्या रेषेच्या चढाबद्दल आपण काही बोलत नाही.

समजा रेख PQ हा उभा रेषाखंड असून हा रेषाखंड समाविष्ट करणारी रेषा X – अक्षाला $(a, 0)$ या बिंदूत छेदते.

P आणि Q बिंदूंचा x – निर्देशक a असेल हे उघड आहे. P आणि Q बिंदूंचे y – निर्देशक अनुक्रमे y_1 आणि y_2 आहेत असे समजा.

चढाच्या व्याख्येनुसार रेख PQ चा चढ $= \dfrac{y_2-y_1}{a-a} = \dfrac{y_2-y_1}{0}.$

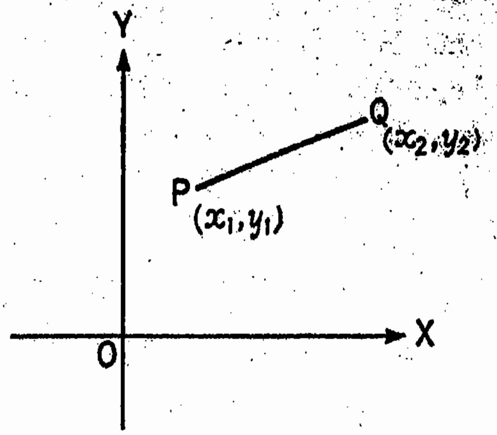
$y_2 - y_1$ ही एक वास्तव संख्या आहे. या वास्तव संख्येस शून्याने भागायचे आहे. कोणत्याही संख्येस शून्याने भागणे याला अर्थ नाही. म्हणून $\dfrac{y_2-y_1}{0}$ अशी वास्तव संख्या अस्तित्वात नाही. म्हणून उभ्या रेषाखंडाचा चढ नसतो असे आपण म्हणतो.

[टीप : आपण पुढील विधाने करतो : (1) आडव्या रेषेस/रेषाखंडास चढ नसतो, (2) उभ्या रेषेस/रेषाखंडास चढ नसतो.

वरील दोन विधानांमध्ये 'चढ नसतो,' हे सारखे शब्द वापरले असले तरी विधानांचे अर्थ सारखे नाहीत.

आपण जेव्हा आडव्या रेषेस/रेषाखंडास चढ नसतो असे म्हणतो तेव्हा 'चढ' हा शब्द व्यावहारिक अर्थाने वापरतो. गणिताच्या दृष्टीने अशा रेषेस/रेषाखंडास चढ असतो आणि तो शून्य असतो. याउलट व्यवहारात उभ्या रेषेला चढ आहे असे म्हणता आले तरी गणितात आपण 'चढ' ह्या कल्पनेची जी व्याख्या केली आहे त्या दृष्टीने उभ्या रेषेला चढ असू शकत नाही.]

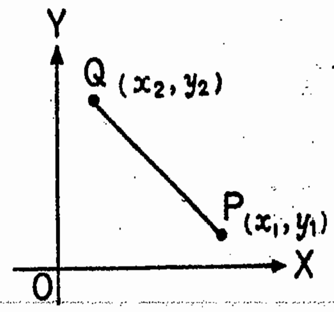
3. आता आ. 10·29 मधे दाखवल्याप्रमाणे **डावीकडून उजवीकडे** चढत जाणारा रेषाखंड विचारात घ्या. समजा P आणि Q बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) आहेत. या स्थितीत $x_2 - x_1$, तसेच $y_2 - y_1$ धन संख्या आहेत हे उघड आहे. चढ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ किंवा $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ हा शून्यापेक्षा जास्त असेल, कारण अंश आणि छेद दोन्ही धन असतील किंवा दोन्ही ऋण असतील.



आ. 10·29

तात्पर्य, **उभा किंवा आडवा नसलेला रेषाखंड डावीकडून उजवीकडे चढत जात असेल तर त्याचा चढ धन असतो. म्हणजेच** $m > 0$.

4. आ. 10·30 मधे दाखवल्यानुसार **उजवीकडून डावीकडे** चढत जाणारा रेषाखंड PQ विचारात घ्या. P आणि Q बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) आहेत असे समजा. या स्थितीत $x_2 - x_1$ ऋण असून $y_2 - y_1$ धन आहे हे उघड आहे. म्हणून चढ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ किंवा $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ शून्यापेक्षा कमी असेल.

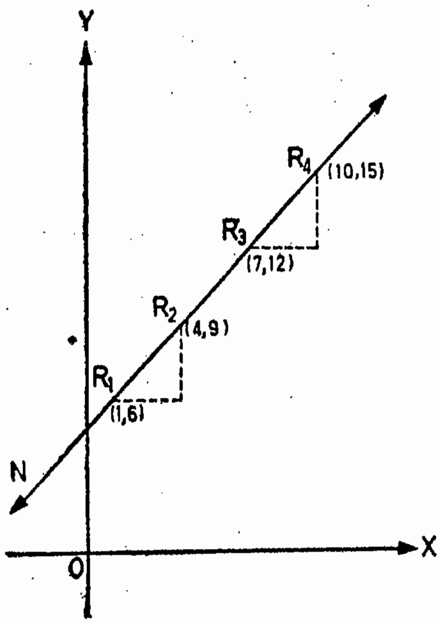


आ. 10·30

अर्थात एखादा **रेषाखंड उजवीकडून डावीकडे चढत जात असेल तर या रेषाखंडाचा चढ ऋण असतो. म्हणजेच** $m < 0$.

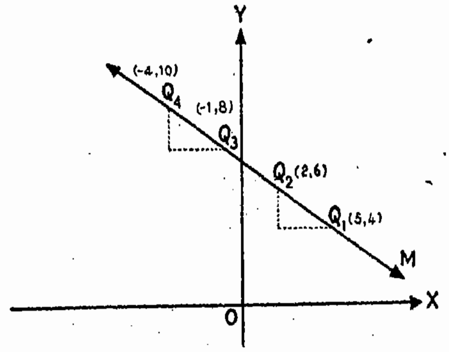
§ 10·11 एका रेषेवरील निरनिराळ्या रेषाखंडांचा चढ :

आ. 10·31 मधे रेषा N वर दोन वेगवेगळे रेषाखंड R_1R_2 आणि R_3R_4 घेतले आहेत. रेख R_1R_2 चा चढ किती आहे ? रेख R_3R_4 चा चढ किती आहे ? एकाच रेषेवरील या दोन रेषाखंडांच्या चढांच्या किमतीत काय संबंध आहे ?



आ. 10·31

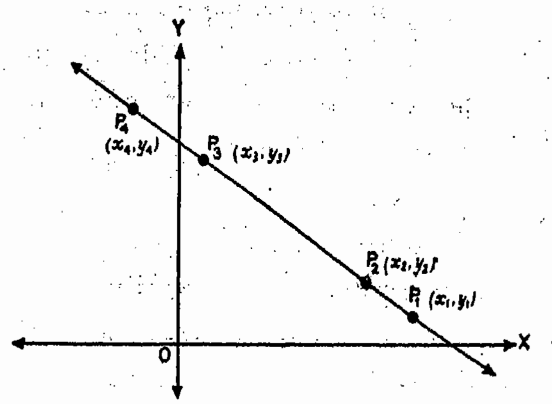
आ. 10·32 मधे रेषा M वर दोन वेगवेगळे रेषाखंड Q_1Q_2 आणि Q_3Q_4 घेतले आहेत.



आ. 10·32

रेख Q_1Q_2 चा चढ काढा. रेख Q_3Q_4 चा चढ काढा. या दोन रेषाखंडांच्या चढांमधे काय संबंध आहे?

आता समजा आ. 10·33 मधे दाखवल्याप्रमाणे रेषा L वर दोन वेगवेगळे रेषाखंड $P_1 P_2$ आणि $P_3 P_4$ आहेत. P_1 बिंदूचे निर्देशक (x_1, y_1) आणि P_2 बिंदूचे निर्देशक (x_2, y_2) आहेत. रेख $P_1 P_2$ चा चढ किती असेल? P_3 बिंदूचे निर्देशक (x_3, y_3) आणि P_4 बिंदूचे निर्देशक (x_4, y_4) आहेत. रेख $P_3 P_4$ चा चढ किती असेल? रेख P_1P_2 चा चढ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ आणि रेख $P_3 P_4$ चा चढ $\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$ यांच्या किंमतीत काय संबंध असेल?



हे चढ समान असतील. हेच खालील प्रमेयात सांगितले आहे.

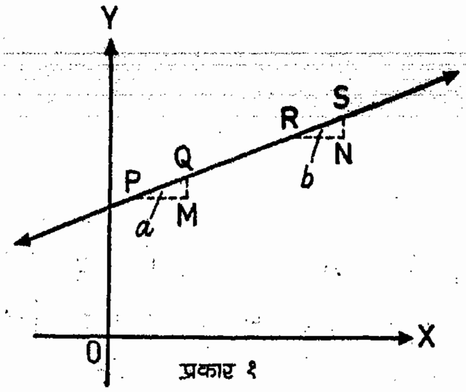
आ. 10·33

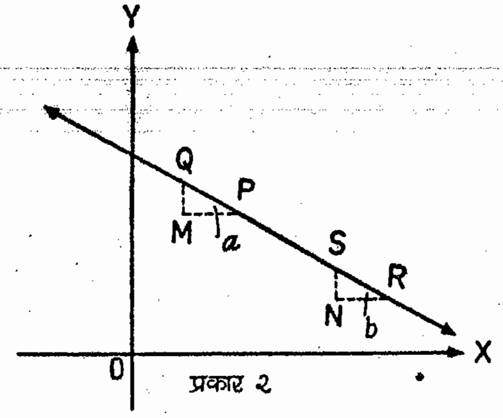
■ **प्रमेय :**

उभ्या नसलेल्या रेषेवरील सर्व रेषाखंडांचे चढ सारखे असतात.

कोणतीही उभी नसलेली एक रेषा घेऊन तिच्यावरील तीन निरनिराळे रेषाखंड घ्या. या रेषाखंडांचे चढ काढून ते सारखे येतात की नाही हे पाहा.

खालील आकृतींत दाखवलेले रेषांचे प्रकार घ्या.





आ. 10·34

सिद्धता : प्रकार 1 व 2 पैकी प्रत्येक बाबतीत

$\triangle$ PMQ आणि $\triangle$ RNS मधे $\angle a \cong \angle b$ ...(संगत कोन

$\angle M \cong \angle N$ ...(प्रत्येक काटकोन)

$\therefore$ $\triangle$ PMQ आणि $\triangle$ RNS समरूप आहेत. $\therefore \frac{l(QM)}{l(PM)} = \frac{l(SN)}{l(RN)}$ ...(1)

दोन्ही प्रकारांत रेख PQ चा चढ $= \frac{l(QM)}{l(PM)}$; रेख RS चा चढ $= \frac{l(SN)}{l(RN)}$

पहिल्या प्रकारात हे दोन्ही चढ धन असतात तर दुसऱ्या प्रकारात दोन्ही चढ ऋण असतात आणि (1) वरून दोन्ही प्रकारांत रेख PQ चा चढ व रेख RS चा चढ हे सारखेच असतात.

पण रेख PQ व रेख RS हे दिलेल्या रेषेवरील कोणतेही दोन रेषाखंड होते.

म्हणून उभ्या नसलेल्या रेषेवरील सर्व रेषाखंडांचे चढ सारखे असतात हे प्रमेय सिद्ध झाले.

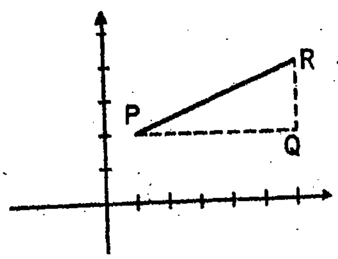
दिलेल्या रेषेवर कुठेही रेषाखंड घेतला तर रेषाखंडाचा चढ तितकाच येतो. यावरून रेषेचा चढ म्हणजे तिच्या कोणत्याही रेषाखंडाचा चढ अशी व्याख्या आपल्याला करता येते.

व्याख्या : उभ्या नसलेल्या रेषेचा चढ म्हणजे त्या रेषेच्या कोणत्याही रेषाखंडाचा चढ होय.

आता आपल्याला 'आडव्या रेषेचा चढ शून्य असतो' तसेच 'उभ्या रेषेला चढ नसतो' असे म्हणता येईल. येथून पुढे चढ हा शब्द आपण उभ्या नसलेल्या रेषेच्या किंवा रेषाखंडाच्या संदर्भातच वापरणार आहोत.

§ 10·12 प्रश्न :

1. पुढील विधानांतील रिकाम्या जागा अशा भरा की ती विधाने सत्य होतील : (a) X – अक्षाला समांतर असणाऱ्या रेषेचा चढ ··· असतो. (b) दिलेल्या रेषेवरील सर्व रेषाखंडांचे चढ ··· असतात. (c) दिलेल्या रेषेचा चढ म्हणजे त्या रेषेच्या कोणत्याही ··· चा चढ होय. (d) P बिंदूचे निर्देशक (x_1, y_1) आणि Q बिंदूचे निर्देशक (x_2, y_2) असतील तर रेख PQ चा चढ $= \frac{y_1 \cdots}{\cdots}$

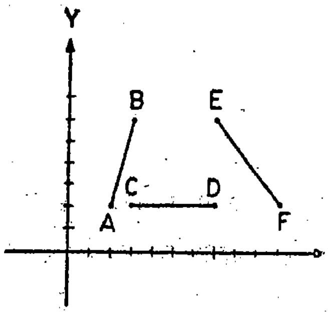


आ. 10·35

2. आ. 10·35 मधील P, Q आणि R बिंदूंचे निर्देशक सांगा व रेख PR चा चढ काढा.

3. आ. 10·36 मधील प्रत्येक रेषाखंडाचा चढ काढा.

4. खालील बिंदूंची जोडी समाविष्ट करणाऱ्या प्रत्येक रेषेचा चढ काढा.
(a) (3, 5) आणि (0, 2), (b) (4, 6) आणि (2, 7), (c) (–1, 3) आणि (–2, 5), (d) (27, 49) आणि (21, 57), (e) $(\frac{1}{2}, 0)$ आणि $(0, \frac{3}{4})$, (f) $(\frac{1}{4}, \frac{3}{2})$ आणि $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.



आ. 10·36

5. प्रश्न 4 मधील कोणती रेषा उजवीकडून डावीकडे आणि कोणती रेषा डावीकडून उजवीकडे चढत जाते ? कशावरून ?

6. A (4, 6), B (2, 3) आणि C (8, 3) हे एका त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत. त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजूचा चढ काढा.

7. P (1, 4), Q (3, 2), R (4, 6) आणि S (2, 8) हे एका चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत. चौकोनाच्या प्रत्येक बाजूचा चढ काढा.

8. एका रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूचे निर्देशक $(1, r)$ आणि $(s, 1)$ आहेत. या रेषाखंडाचा चढ किती असेल ?

9. सारख्या प्रमाणात चढत जाणाऱ्या एका रस्त्याची उंची दर 75 मीटर क्षितिजसमांतर अंतरास $1\frac{1}{2}$ मीटरने वाढते तर त्या रस्त्याचा चढ किती आहे?

10. रेख PQ चा चढ $m=3$ असून P बिंदूचे निर्देशक (5, 2) आणि Q बिंदूचा x – निर्देशक 6 आहे; तर Q बिंदूचा y – निर्देशक किती आहे ?

11. एका रेषेचा चढ -1 आहे. या रेषेवरील एका बिंदूचे निर्देशक (3, 5) आहेत. याच रेषेवरील दुसऱ्या एका बिंदूचा y – निर्देशक 4 आहे; तर या दुसऱ्या बिंदूचा x – निर्देशक काय असला पाहिजे ?

§ 10·13 सरळ रेषेचे समीकरण :

समजा दिलेल्या X आणि Y – अक्षांच्या संदर्भात एका प्रतलात एक निर्देशक पद्धती घेतली आहे.

समजा रेषा L ही Y – अक्षाच्या उजवीकडे 4 अंतरावर त्या अक्षाला समांतर अशी रेषा आहे. $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ हे L रेषेवरील विविध बिंदू आहेत. या बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$ आहेत. येथे x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3;...; x_n, y_n ही अक्षरे म्हणजे चल नसून वास्तव संख्या आहेत हे लक्षांत घ्या. या संख्यांनी L रेषेवरील बिंदू P_1, P_2, $P_3, \ldots$, P_n चे निर्देशक व्यक्त केले आहेत. हे सर्व बिंदू रेषा L वर आहेत म्हणून $x_1=4$, $x_2=4$, $x_3=4, \ldots x_n=4$ हे उघड आहे. यावरून आपल्या लक्षात येते की या बिंदूंपैकी कोणत्याही बिंदूचा x – निर्देशक हा त्याची किंमत 4 आहे ही अट पूर्ण करतो. रेषेवरील कोणत्याही P बिंदूसाठी आपल्याला हे विधान करता येईल काय ? प्रतलातील कोणत्याही बिंदूचे निर्देशक आपण कसे व्यक्त करतो ? P हा बिंदू निश्चित नसल्याने त्याचे निर्देशक सांगण्यासाठी आपल्याला निश्चित अशा वास्तवसंख्यांचा उपयोग करता येत नाही. ही अडचण दूर करण्यासाठी आपण x, y सारख्या चलांचा उपयोग करतो आणि P चे निर्देशक (x, y) ने दाखवतो. x व y च्या किमती जसजशा बदलत जातात तसतसे P बिंदूचे प्रतलातील स्थान बदलत जाते. या उलट P बिंदूचे प्रतलातील स्थान जसजसे बदलत जाते तसतशा x व y च्या किमती बदलत जातात.

समजा P हा L रेषेवरील कोणताही बिंदू असून त्याचे निर्देशक (x, y) आहेत. तरी हा P बिंदूचा x – निर्देशक 4 हाच असला पाहिजे. हे व्यक्त करण्यासाठी $x=4$ लिहितात. L रेषेवरील प्रत्येक बिंदूचा x – निर्देशक 4 आहे याचा आधार घेऊन आपण $x=4$ हे समीकरण मांडले. येथे $x=4$ हे समीकरण L रेषेचा निर्देश करते असे आपण म्हणतो.

आता प्रतलातील बिंदूंच्या निर्देशकांसंबंधीची एक अट या दृष्टीने $x=4$ या समीकरणाकडे पाहू. आपण प्रतलातील असे बिंदू शोधू की जे ही अट पूर्ण करतील. $x=4$ या समीकरणाद्वारे सांगितलेल्या अटीवरून स्पष्ट होते की, ज्यांचे x – निर्देशक 4 असतील असेच बिंदू विचारात घेतले पाहिजेत. असे सर्व बिंदू कुठे असणार ? अर्थातच ते L रेषेवर असले पाहिजेत. म्हणून $x=4$ हे समीकरण खालील गुणधर्म असणाऱ्या L रेषेचा निर्देश करते असे आपण म्हणतो : (i) L रेषा ही Y – अक्षास समांतर आहे. (ii) L रेषा ही Y – अक्षाच्या उजवीकडे 4 अंतरावर आहे.

उदा० : खालील समीकरणांनी कोणत्या रेषाचा निर्देश होतो ?

1. (a) $x=5$, (b) $x=-7$, (c) $x=0$, (d) $x=13$, (e) $x=-12$.
2. (a) $y=6$, (b) $y=-5$, (c) $y=0$, (d) $y=15$.

§ 10·14 दिलेल्या अटींवरून रेषेचे समीकरण मांडणे :

बीजगणितात तुम्ही निरनिराळ्या रेषीय समीकरणांचा अभ्यास केला आहे. अशा समीकरणांचे आलेख सरळ रेषा असतात हे तुम्हांला माहीत आहे.

आता आपण उलट बाजूचा विचार करू. प्रतलातील रेषेचे समीकरण कसे मांडावे हे आपण पाहू. एखादया रेषेचे समीकरण आपण जेव्हा मांडू तेव्हा त्या समीकरणाने रेषा निर्देशित होते असे म्हणू.

रेषेच्या समीकरणात, त्या रेषेवरील बिंदूच्या निर्देशकाकडून जिचे पालन होईल अशी अट वर्णिलेली असते.

समजा, आपल्याला पुढील गुणधर्म असणाऱ्या रेषेचे समीकरण मांडायचे आहे. : (i) ती रेषा ज्याचे निर्देशक (a, b) आहेत अशा P बिंदूतून जाते. (ii) तिचा चढ m आहे $(m \neq 0)$.

समजा $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ हे त्या रेषेवरील बिंदू असून त्यांचे निर्देशक अनुक्रमे (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), $\ldots$, (x_n, y_n) आहेत.

येथे $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ ही अक्षरे निश्चित वास्तव संख्या दाखवतात; ती चल नाहीत हे लक्षात घ्या.

पुढील रेषाखंडांपैकी प्रत्येक रेषाखंड विचारात घ्या : रेख PQ_1, रेख PQ_2, रेख PQ_3, $\ldots$, रेख PQ_n हे सर्व एकाच रेषेचे रेषाखंड असल्यामुळे यांपैकी प्रत्येक रेषाखंडाचा चढ m आहे $(m \neq 0)$.

यावरून आपणास खालील समीकरणे मिळतात.

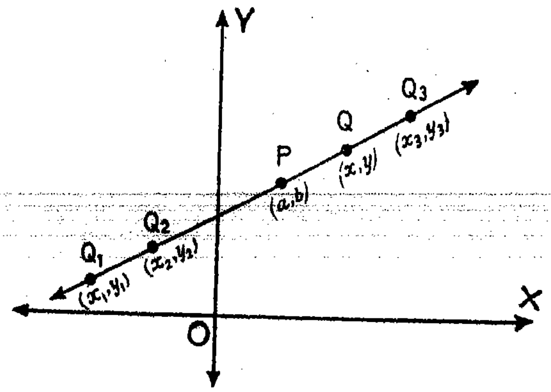
$$\frac{y_1 - b}{x_1 - a} = m$$

$$\frac{y_2 - b}{x_2 - a} = m$$

$$\frac{y_3 - b}{x_3 - a} = m$$

$$\ldots$$

$$\frac{y_n - b}{x_n - a} = m$$



आ. 10·37

दिलेल्या रेषेवर Q हा आणखी एक बिंदू आहे असे समजा. Q बिंदूचे निर्देशक कसे लिहाल ?

समजा Q बिंदूचे निर्देशक (x, y) आहेत. x व y च्या किमती जसजशा बदलत जातील तसतसे Q बिंदूचे रेषेवरील स्थान बदलत जाईल. या उलट रेषेवर Q बिंदूचे स्थान जस जसे बदलत जाईल तसतशा x व y ह्यांच्या किमतीही बदलत जातील. हे लक्षात ठेवावे. रेख PQ चा चढ किती असेल ?

रेख PQ चा चढ $\dfrac{y-b}{x-a}$ इतका आहे.

परंतु रेख PQ हा दिलेल्या रेषेत समाविष्ट असल्यामुळे Q बिंदूच्या त्या रेषेवरील कोणत्याही स्थानासाठी रेख PQ चा चढ m हाच आहे.

म्हणून $\dfrac{y-b}{x-a} = m$ किंवा $y - b = m(x - a)$

वरील समीकरणाने मिळणारी अट ही (a, b) बिंदूतून जाणाऱ्या व $m (m \neq 0)$ चढ असणाऱ्या रेषेवरील कोणत्याही बिंदू Q च्या निर्देशकांनी पूर्ण होते. म्हणून या समीकरणाने रेषा निर्देशित होते असे आपण म्हणतो.

आता वरील चर्चेचा सारांश प्रमेयाच्या स्वरूपात मांडू.

■ **प्रमेय : रेषेचे समीकरण (बिंदू-चढ प्रकाराचे).**

ज्याचे निर्देशक (a, b) आहेत अशा बिंदूतून जाणाऱ्या आणि चढ $m (m \neq 0)$ असणाऱ्या रेषेचे समीकरण $y-b=m(x-a)$ असते.

■ **प्रमेय :**

$y-b=m(x-a)$ या समीकरणाने, ज्या बिंदूचे निर्देशक (a, b) आहेत अशा बिंदूतून जाणाऱ्या आणि चढ $m (m \neq 0)$ असणाऱ्या रेषेचा निर्देश होतो.

§ **10·15** **उदा०** (2, 3) आणि (5, 4) या बिंदूतून जाणाऱ्या रेषेचे समीकरण मांडा.

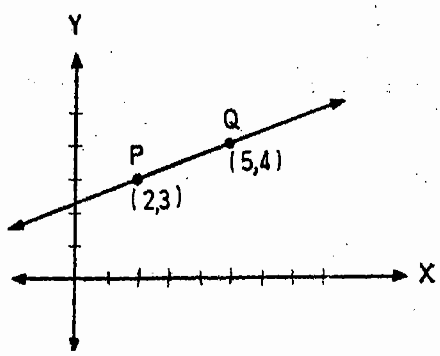
समजा P=(2, 3) आणि Q=(5, 4). रेख PQ चा चढ$=\frac{4-3}{5-2}=\frac{1}{3}$.

∴ रेषा PQ चा चढही $\frac{1}{3}$ आहे.

ही रेषा, (2, 3) या बिंदूतून जाते. ∴ रेषेचे समीकरण

$y-3=\frac{1}{3}(x-2)$ ...(1)

म्हणजेच $x-3y+7=0$ ...(2)



आ. 10·38

Q ऐवजी (−1, 2) हा बिंदू घेऊनही आपल्याला समीकरण मिळवता आले असते. तुम्ही तसा प्रयत्न करा.

समीकरण (1) आणि समीकरण (2) यांच्या रूपाचा विचार करा. ती दोन्हीही एकाच रेषेची समीकरणे असली तरी दुसरे पहिल्यापेक्षा जास्त सरळ आहे असे वरवर वाटते. परंतु समीकरणाच्या पहिल्या रूपामुळे रेषेचे काही गुणधर्म ठळकपणे स्पष्ट होतात. त्या रूपाकडे पाहूनच आपण हे सांगू शकतो. (1) दिलेल्या रेषेचा चढ $\frac{1}{3}$ आहे; आणि (2) ही रेषा (2, 3) ह्या बिंदूतून जाते. समीकरणाच्या दुसऱ्या रूपावरून हे गुणधर्म चटकन उमगत नाहीत.

§ **10·16** **रेषेचे समीकरण (चढ-आंतरछेद प्रकार) :**

समजा रेषा L चा चढ m आहे आणि ही रेषा Y−अक्षास ज्या बिंदूत छेदते त्या बिंदूचा y−निर्देशक c आहे.

समजा रेषा L आणि Y−अक्षाचा छेदबिंदू P आहे. P बिंदूचे निर्देशक $(0, c)$ असतील.

बिंदू चढ प्रकारावरून रेषेचे समीकरण $y-c=m(x-0)$ म्हणजेच $y=mx+c$

रेषा, Y−अक्षास ज्या बिंदूत छेदते त्या P बिंदूच्या y−निर्देशकास (येथे c) रेषेचा Y−अक्षावरील आंतरछेद म्हणतात.

$y=mx+c$ या समीकरणास चढ-आंतरछेद प्रकारचे समीकरण म्हणतात.

§ **10·17** **उदा० 1 :** $y=5x+7$ या रेषेचा चढ काय आहे? ही रेषा X तसेच Y−अक्षास ज्या बिंदूत छेदते त्या बिंदूचे निर्देशक काढा.

दिलेले समीकरण चढ-आंतरछेद प्रकारचे आहे. रेषेचा चढ 5 आहे. रेषेचा Y−अक्षावरील आंतरछेद 7 आहे. ∴ रेषा, Y−अक्षाला ज्या बिंदूत छेदते त्या बिंदूचे निर्देशक (0, 7) आहेत.

x ऐवजी शून्य आणि y एवजी 7 घेऊन याचा पडताळा घेता येईल.

समजा रेषा, X - अक्षास Q बिंदूत छेदते आणि Q बिंदूचे निर्देशक (u, o) आहेत. बिंदू Q हा दिलेल्या रेषेवर असल्यामुळे त्याच्या निर्देशकांनी समीकरणाचे समाधान झाले पाहिजे. मग x ऐवजी u आणि y ऐवजी 0 घालून $0=5u+7 \therefore u=-\frac{7}{5}$.

$\therefore$ रेषा, X – अक्षास ज्या बिंदूत छेदते त्या बिंदूचे निर्देशक $(-\frac{7}{5}, 0)$ होत.

उदा० 2 : $4x-5y-7=0$ या रेषेचा चढ काय आहे? या रेषेचे, X तसेच Y – अक्षावरील आंतरछेद काढा. (3, 5) हा बिंदू दिलेल्या रेषेवर आहे काय?

प्रथम समीकरण चढ-आंतरछेद स्वरूपात मांडू.

$4x-5y-7=0 \therefore 5y=4x-7 \therefore y=\frac{4}{5}x-\frac{7}{5}$.

यावरून चटकन सांगता येते की, रेषेचा चढ $\frac{4}{5}$ असून त्याचा Y-अक्षावरील आंतरछेद $-\frac{7}{5}$ आहे.

रेषेचा, X–अक्षावरील आंतरछेद काढण्यासाठी समीकरणात $y=0$ ठेवा. (का?)

X–अक्षावरील आंतरछेद $\frac{7}{4}$ आहे. (पडताळा घ्या.) (3,5) हा बिंदू रेषेवर आहे किंवा नाही हे पाहण्यासाठी समीकरणात x ऐवजी 3 आणि y ऐवजी 5 या किंमती ठेवून समीकरण पूर्ण होते का हे पाहावे लागेल. $4(3)-5(3)-7 \stackrel{?}{=} 0$.

उत्तर नकारार्थी आहे म्हणून (3, 5) हा बिंदू रेषेवर नाही असा आपण निष्कर्ष काढतो.

§ 10·18 प्रश्न :

1. खालील विधानांतील रिकाम्या जागा भरून विधाने सत्य होतील अशी पूर्ण करा. (a) एक रेषा बिंदू (x_1, y_1) मधून जाते आणि तिचा चढ m आहे. या रेषेचे समीकरण $y-\ldots=\ldots(x-\ldots)$; (b) एका रेषेचे समीकरण $y=qx+r$ आहे. या रेषेचा चढ ··· आहे. (c) एका रेषेचे समीकरण $y=mx+c$ आहे. ही रेषा Y - अक्षास (..., ...) बिंदूत छेदते. (d) $y-3=\frac{1}{2}(x-5)$ ही रेषा Y - अक्षास (..., ...) बिंदूत छेदते.

2. खालील समीकरणांवरून रेषांचे चढ सांगा.
   (a) $y-5=2(x-7)$, (b) $y-2=5(x-2)$, (c) $y+3=\frac{1}{3}(x-5)$, (d) $y=-5(x+3)$, (e) $y-1=\frac{3}{7}(x-8)$, (f) $y-5=8x$.

3. खालील समीकरणांवरून प्रत्येक रेषा Y – अक्षास ज्या बिंदूत छेदते त्या बिंदूचे निर्देशक सांगा.
   (a) $y-3=2(x+5)$, (b) $y-5=5(x-2)$ (c) $y=\frac{1}{2}(x-7)$, (d) $y+5=\frac{2}{3}(x-10)$.

4. खाली रेषेचा चढ m आणि रेषेवरील बिंदू P चे निर्देशक दिले आहेत. प्रत्येक रेषेचे $y-y_1=m(x-x_1)$ या स्वरूपाचे समीकरण मांडा.

   (a) P(3, 5) आणि $m=2$, (b) P(2, −3) आणि $m=4$, (c) P(−3, 7) आणि $m=\frac{1}{3}$, (d) P(−2, −3) आणि $m=\frac{2}{5}$ (e) P(0, 6) आणि $m=\frac{6}{7}$.

5. खाली रेषेवरील दोन बिंदू दिले आहेत. प्रत्येक रेषेचे $y=mx+c$ या स्वरूपाचे समीकरण लिहा.
   (a) (2, 3) आणि (4, 7), (b) (0, 5) आणि (5, 6), (c) (3, 0) आणि (−2, 3) (d) (−3, 5) आणि (4, −7), (e) (−2, −5) आणि (−4, −3).

6. खालील समीकरणांवरून प्रत्येक रेषेचा चढ सांगा.

(a) $y=3x-2$, (b) $y=5x+7$, (c) $y=\frac{1}{2}x-3$, (d) $y=x-\frac{4}{5}$.

7. खालील रेषा Y - अक्षास कोणत्या बिंदूत छेदतात हे सांगा.

(a) $y=2x-3$, (b) $y=x-5$, (c) $y=\frac{2}{3}x-4$, (d) $y=5x-\frac{2}{7}$.

8. प्रकाश आणि सतीश यांनी 'बिंदू (2, −5) आणि (8, 7) यांमधून जाणाऱ्या रेषेचे समीकरण लिहा' या प्रश्नाचे उत्तर खालीलप्रमाणे दिले.

प्रकाश : $y+5=2(x-2)$; सतीश : $y-7=2(x-8)$.

कुणाचे उत्तर बरोबर आहे? का?

9. खालील रेषा (उदा. i ते viii) ज्यांचे आलेख आहेत त्यांची $y=mx+c$ या स्वरूपातील समीकरणे लिहा.

(i) बिंदू (2, 3) आणि बिंदू (4, 5) मधून जाणारी रेषा.

(ii) बिंदू (3, 4) मधून जाणारी व चढ 5 असणारी रेषा.

(iii) बिंदू (−3, 4) मधून जाणारी X – अक्षास समांतर असणारी रेषा.

(iv) बिंदू (−3, 5) मधून जाणारी Y – अक्षास समांतर असणारी रेषा.

(v) X – अक्ष.

(vi) Y – अक्ष. (शक्य आहे काय?)

(vii) आरंभबिंदू आणि (−3, 5) मधून जाणारी रेषा.

(viii) रेषा L ही बिंदू (3, 5) आणि (4, −3) मधून जाते. या रेषेचा Y – अक्षावरील आंतरछेद सांगा. रेषा M ही रेषा L ला समांतर असून बिंदू (7, −3) मधून जाते. रेषा M चे Y तसेच X –अक्षावरील आंतरछेद काढा.

स्वाध्याय :

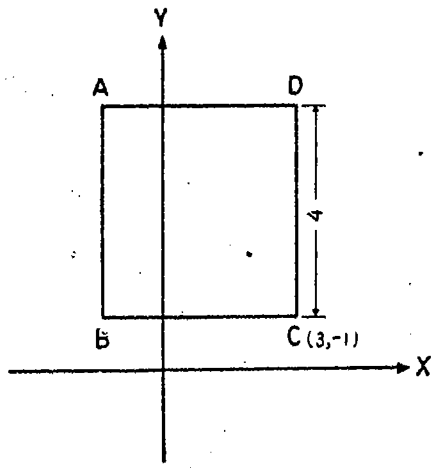
1. खालील बिंदूंपैकी प्रत्येक बिंदू कोणत्या चरणात असेल हे सांगा. : A (3, −7), B (4, 5), C (−3, −5), D (−3, 11), E (−7, −13), F (7, −3).

2. बिंदू (2, 7) मधून X – अक्षावर टाकलेल्या लंबाच्या पादबिंदूचे निर्देशक काय असतील?

3. बिंदू (3, −11) मधून Y – अक्षावर टाकलेल्या लंबाच्या पादबिंदूचे निर्देशक सांगा.

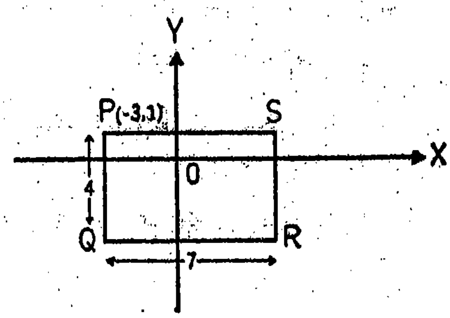
4. P (0, −3) आणि Q (0, 2) यांपैकी कोणता बिंदू आरंभबिंदूच्या जास्त जवळ आहे?

5. बाजूच्या आकृतीमधे दाखवलेल्या चौरस ABCD च्या A, B आणि D या शिरोबिंदूंचे निर्देशक सांगा.



आ. 10·39

6. बाजूच्या आकृतीत दिलेल्या आयताच्या P, R आणि S या शिरोबिंदूंचे निर्देशक सांगा.



आ. 10·40

7. खालील बिंदूंना सांधणाऱ्या रेषाखंडांच्या मध्यबिंदूंचे निर्देशक सांगा.

(a) (2, 5) आणि (4, 7),

(b) (−3, 4) आणि (4, −3),

(c) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ आणि $(\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$,

(d) $(a+b, c)$ आणि $(a, b+c)$.

8. एका रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंचे निर्देशक (2, 7) आणि (13, 13) आहेत. या रेषाखंडाचे तीन एकरूप भाग करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक सांगा.

9. (0, 3) या बिंदूच्या X−अक्षावरील परावर्तन बिंदूचे निर्देशक काय असतील ?

10. (−9, 0) या बिंदूच्या Y−अक्षामधील परावर्तन बिंदूचे निर्देशक काढा.

11. पुढील बिंदूंच्या X−अक्षातील परावर्तन बिंदूंचे निर्देशक काय असतील ? : (i) A(3, 7), (ii) B(4, 7), (iii) C(11, 5).

12. पुढील बिंदूंच्या Y−अक्षातील परावर्तन बिंदूंचे निर्देशक काढा : P(−3, 7), Q(−7, 11), R(−1, 13).

13. C(3, 5) या बिंदूचा X−अक्षातील परावर्तन बिंदू D आहे. आणि Y−अक्षातील परावर्तन बिंदू B आहे. बिंदू A = (−3, 4) आहे. रेख AC आणि रेख BD च्या छेदबिंदूचे निर्देशक सांगा.

14. खाली Q आणि R या बिंदूंचे निर्देशक दिले आहेत. रेख QR ला बिंदू P दिलेल्या गुणोत्तरात विभागत असेल तर P बिंदूचे निर्देशक काढा.

(a) Q(2, 3), R(4, 7) आणि $\frac{l(QP)}{l(PR)} = \frac{2}{3}$,

(b) Q(−3, 4), R(6, −5) आणि $l(QP) = 4\, l(PR)$,

(c) Q(8, −10), R(−4, −6) आणि $l(QP) = \frac{1}{6}\, l(PR)$.

15. बिंदू B हा रेख AC चा मध्यबिंदू आहे. A बिंदूचे निर्देशक (4, 6) आणि B बिंदूचे निर्देशक (5, 7) आहेत. तर C बिंदूचे निर्देशक सांगा.

16. रेख AB वर P बिंदू असा आहे की $\frac{l(AP)}{l(PB)} = \frac{1}{3}$. A आणि P बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे (4, 6) आणि (5, 7) आहेत, तर B बिंदूचे निर्देशक सांगा.

17. बिंदू (3, −4) मधून जाणाऱ्या व X−अक्षास समांतर असणाऱ्या रेषेचा चढ किती असेल ?

18. खालील बिंदूंना सांधणाऱ्या रेषाखंडांचे चढ सांगा.

(a) (2, 7) आणि (−3, 5); (b) (−3, 5) आणि (5, −3); (c) (4, −9) आणि (−5, −11).

19. एक त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंचे निर्देशक पुढीलप्रमाणे आहेत : A(3, −4), B(5, 7), C(−4, 5). या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंचे चढ काढा.

20. प्रश्न 19 मधील त्रिकोणाच्या बाजू समाविष्ट करणाऱ्या रेषांचे $y = mx + c$ या स्वरूपाची समीकरणे लिहा. (6, −8) हा बिंदू रेषा AB वर राहतो काय?

21. एका चौकोनाच्या शिरोबिंदूंचे निर्देशक पुढीलप्रमाणे आहेत : A (0, 0), B (7, 2), C (7, 7) D (2, 7). कर्ण AC आणि कर्ण BD यांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषांची 'बिंदू-चढ' स्वरूपातील समीकरणे सांगा. प्रत्येक कर्णाचा चढ सांगा.

22. △PQR च्या शिरोबिंदूचे निर्देशक P (3, 7), Q (5 11) आणि R (−2, 8) आहेत. त्रिकोणाच्या तिन्ही मध्यगांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषांची 'चढ-छेद' स्वरूपातील समीकरणे लिहा.

23. बिंदू (0, 0) आणि (4, 5) मधून जाणाऱ्या तसेच बिंदू (0, 0) आणि (−5, 4) मधून जाणाऱ्या रेषांचे आलेख काढा.

24. बिंदू (6, 0) आणि (0, 2) मधून तसेच बिंदू (12, 0) आणि (0, 4) मधून जाणाऱ्या रेषांचे आलेख काढा. या दोन रेषा समांतर असल्याची खात्री करून घ्या. यावरून समांतर रेषांच्या चढाबद्दल तुम्हांला काय सांगता येईल?

25. $3y = 4x - 5$ आणि $9y - 12x + 7 = 0$ ही दोन रेषांची समीकरणे आहेत. या रेषा समांतर आहेत काय? कशावरून?

उत्तरे

प्रश्नसंग्रह 1·3

[1] (i) वर्तुळ, (ii) दोन, (iii) (a) वर्तुळावर, (b) जीवा, (c) $2r$. (iv) केंद्रबिंदू, वृत्तछेदिका, व्यास, जीवा, त्रिज्या. (v) (a) बाह्य, l(PA) > 4. (b) लहान, (c) त्रिज्या.

[2] सत्य विधाने : i, iii, v, vii, ix, x, xi, xii, xv.

[3] (i) रेषाखंड, वास्तवसंख्या. (ii) वास्तवसंख्या, रेषाखंड. (iii) वास्तवसंख्या, वास्तवसंख्या. (iv) वास्तवसंख्या, वास्तवसंख्या. (v) रेषाखंड. (vi) रेषाखंड.

[8] (i) सत्य (ii) असत्य, एकाच. (iii) असत्य, वर्तुळाचे केंद्र. (iv) असत्य, रेषाखंड, (v) सत्य, (vi) असत्य, तोच, वेगवेगळ्या.

प्रश्नसंग्रह 1·10

[2] (i) वर्तुळ, (ii) बाह्य, (iii) बाहेरून, (iv) स्पर्शरेषा, (v) बाह्यभागात. [3] (ii) दोन, (iii) 7. [4] सत्य विधाने :— (iii), (vi). [5] $4\sqrt{15}$. [8] अनुक्रमे 22, 6, 14. [10] d (PB) = $3\sqrt{21}$, d (Q·A) = 12. [14] $4\sqrt{3}$.

प्रश्नसंग्रह 1·21

[1] (i) d(AM) = 8, d(AB) = 16. (ii) d(PM = $4\sqrt{5}$. (iii) $r = 17$. (iv) d(PM) = $\sqrt{21}$. (v) d(AM) = $5\sqrt{7}$, d(AB) = $10\sqrt{7}$.

[2] 16 (3), $4\sqrt{21}$, (4) $8\sqrt{3}$, 4, (5) $4\sqrt{3}$. [6] 15. [12] सत्य विधाने (ii), (iv), (v), (vii), (viii).

असत्य विधाने (i) एकरूप, (iii) एकरूप, (vi) स्पर्शिकेला.

1 – M, 2 – I, 3 – S, 4 – M, 5 – S, 6 – C, 7 – S, 8 – M, 9 – S, 10 – M.

स्वाध्याय (पान 21)

[1] (i) अंतर्भागात, (ii) एकरूप, (iii) एककेंद्री, (iv) स्पर्शिका, (v) वृत्तछेदिका, (vi) बाह्यभागात, (vii) वृत्तछेदिका, (viii) त्रिज्येच्या, (ix) त्रिज्या, (x) जीवा.

[2] $16\sqrt{2}$.

[3] (a) वर्तुळावर, (h) वर्तुळाबाहेर, (c) वर्तुळाच्या आत, (d) वर्तुळावर, (e) वर्तुळाच्या आत.

[4] सत्य विधाने : (a), (e), (f), (h).

[10] सत्य विधाने : (a), (b), (c), (e). असत्य विधाने : (d)—A बिंदू वर्तुळावर पाहिजे.

[15] $\sqrt{51}$.

प्रश्नसंग्रह 2·9

[1] (a) केंद्र, (b) केंद्रीय कोनाच्या, (c) 180, (d) लहान, (e) $m <$ APB, (f) m (कंस BD), (g) कंस AB, कंस BD, कंस RS, कंस ST, कंस ABD, कंस RST, (h) कंस AD, कंस ADB, कंस RT, कंस RTS, कंस BAD, कंस SRT.

[2] (i) असत्य, जास्त ऐवजी कमी, (ii) असत्य, 360 ऐवजी 180, (iii) सत्य, (iv) असत्य, 180 ऐवजी 360, (v) असत्य, कंस PYQ ऐवजी कंस PXQ, (vi) असत्य, फक्त एकच ऐवजी असंख्य, (vii) सत्य, (viii) सत्य.

[3] m (कंस BRC) = 60, m (कंस CBS) = 240, m (कंस CTS) = 120, m (कंस SCB) = 180, m (कंस CSB) = 300.

[4] M (लघुकंस QS) = m (लघुकंस PR) = 180. M (लघुकंस PS) = m (लघुकंस RQ) = 100.
M (कंस RQS) = m (कंस RPS) = m (कंस PRQ)
= m (कंस PSQ) = 180

[5] कंस HIJ. [7] 80, 280. [8] सत्य विधाने : (ii), (iii). असत्य विधाने : (i).

[9] (i) ∠AOB व ∠DOC, (ii) होय, (iii) होय, (iv) कंस ABC.

[10] (i) 36, (ii) 179, (iii) 270, 359, 181, (iv) 70, 290, (v) l(AB) = r.
l(AB) = $r\sqrt{2}$, (vi) 360.

[11] (i) x = m (कंस CDE), (ii) m (कंस HAB), (iii) m (कंस HAC),
(iv) m (कंस ABC), (v) m (कंस ABD) किंवा m (कंस ACD).

प्रश्नसंग्रह 2·21

[1] (i) कंस SPQ, (ii) PQR, (iii) PQR, (iv) PQT, (v) लघुकंस QR व लघुकंस PT,
(vi) लघुकंस SR व लघुकंस ST, (vii) ∠PAS, (viii) नाही, (ix) आहे, (x) नाही,
(xi) अर्धवर्तुळ काटकोन, (xii) 80, (xiii) 145, (xiv) ∠PSR, (xv) 90.

[2] $m\angle A = 50$, m (कंस CXB) = 60, m (कंस AYD) = 170, $m\angle D = 75$, $m\angle B = 105$.

[5] (a) $m\angle ARB = m\angle ASB = 170$. (b) $m\angle ARB = m\angle ASB = 70$.
(c) $m\angle DEF < m\angle ARB$.

[8] 60; [9] 20; [10] (i) 6, (ii) 10, (iii) $\sqrt{3}$, [iv] $a = 16$, $b = 9$.

[17] (i) $m\angle DGH = 121$; $m\angle GHK = 59$. स्पर्शिकांची लांबी सारखी; पायावरचे कोन.

[22] (i) $m\angle BEC = 65$; (ii) $m\angle AED = 55$. (iii) $m\angle AXD = 57$.

[24] (i) $m\angle K = 20$ (ii) $m\angle K = 54$ (iii) m (कंस CZD) = 154.

[26] (i) $m\angle A = 70$. (ii) m (कंस PYT) = 254. m (कंस PXT) = 106. (iii) 108.

स्वाध्याय (पान 47)

[1] (i) m (कंस CFB) = 130. (ii) $m\angle DAB = 80$. (iii) $m\angle BCN = 25$,
(iv) $m\angle CBA = 115$, (v) $m\angle CAB = 40$.

[2] सत्य विधाने :—(i), (ii). असत्य विधाने :—(iii), (iv), (v).

[10] (i) ∠ADE, (ii) ∠BAD, (iii) सरूपतेचा, (iv) ABDE.

[14] सत्य विधाने :—(iii), (iv).

प्रश्नसंग्रह 3·5

[2] 1, 1, 1, 3. होय. 4. होय. 5. (i) $\angle N \cong \angle B$, (ii) $\angle P \cong \angle D$,
(iii) $\angle A \cong \angle M$. (iv) $\frac{l(MN)}{l(AB)}$, $\frac{l(MP)}{l(AD)}$, $\frac{l(NP)}{l(BD)}$.

[6] (i) $\angle B \cong \angle E$; (ii) $\angle G \cong \angle F$ (iii) $\angle A \cong \angle D$. (iv) ......समान...1...

प्रश्नसंग्रह 3·9

1. $\frac{3}{4}$, 2. $\frac{8}{10}$, 3. $\frac{4}{3}$, 4. $\frac{5}{9}$, 5. $\frac{5}{8}$, 6. $\frac{3}{2}$, 7. $\frac{1}{2}$, 8. $\frac{15}{26}$.

प्रश्नसंग्रह 3·13

[1] (a) (ii); (b) (iii); (c) (ii) (c चे उत्तर (i) हेही असू शकते) or (c) (i) (d) (iii)

[2] (i) l(EC), (ii) l(AD), समान उंचीचे.

प्रश्नसंग्रह 3·16

[1] (i) $\frac{s}{t}$, (ii) 9. [4] (i).

प्रश्नसंग्रह 3·18

[1] (a) पुरेसे, (b) पुरेसे, (c) पुरेसे, (d) अपुरे. [2] नाही. [3] ना[illegible], होय.

प्रश्नसंग्रह 3·21

[1] (i) दुभाजक होतो. (ii) दुभाजक होत नाही. (iii) दुभाजक होतो. [2] (a) 3, (b) $9\frac{8}{17}$.
[4] (i) 4, (ii) $\frac{40}{3}$. [5] होय. [6] $p=3$. [10] होय.

प्रश्नसंग्रह 3·25

(i) खरे, (ii) खोटे, (ii) खरे, (iv) खरे, (v) खरे, (vi) खरे.

प्रश्नसंग्रह 3·27

[1] (i) ABC⟷FED ही समरूपता आहे. (ii) ABC⟷FED ही समरूपता आहे.
(iii) ABC⟷DFE ही समरूपता आहे. (iv) दिलेले त्रिकोण समरूप [illegible]ीत.
[2] (i) होय, (ii) PTS⟷PQR, (iii) l(QR). [3] MAB⟷M[illegible]N, होय.

प्रश्नसंग्रह 3·32

[1] (i) पुरेशी आहे. (ii) पुरेशी नाही. (iii) पुरेशी आहे. (iv) पुरेशी नाही.
(v) पुरेशी नाही. (vi) पुरेशी आहे. (vii) पुरेशी आहे.
[2] (i) शक्य आहे. (ii) अशक्य आहे. (iii) शक्य आहे. (iv) अशक्य आहे.
[3] (i) होय. (ii) होय. (iii) $\triangle PEF \sim \triangle FED$. को को को. [4] (i) हो[illegible]. (ii) को को को.
(iii) $\triangle ABC$ संगत $\triangle PRQ$ [7] 4; 16.

प्रश्नसंग्रह 3·34

[2] (i) $x=\sqrt{20}$; $y=\sqrt{45}$; $z=6$. (ii) $x=\frac{33}{[illegible]}$; $y=\sqrt{33}$; $z=\frac{7\sqrt{33}}{[illegible]}$;
(iii) $x=5$; $y=\sqrt{20}$; $z=\sqrt{45}$. (iv) $x=6$. [3] 150; [[illegible]] (i) $10\sqrt{2}$;
(ii) $10\sqrt{2}$.

प्रश्नसंग्रह 3·36

[1] 5; 25. [2] 6. [3] $\frac{x^2}{y^2}$.

स्वाध्याय (पान 78)

[2] (i) होय. (ii) नाही. (iii) नाही.

[3] (i) $\frac{l(MN)}{l(PQ)}=\frac{l(MQ)}{l(PR)}$. (ii) $\frac{l(NQ)}{l(QR)}=\frac{l(MQ)}{l(PR)}$; (iii) $\angle PQR$.

[4] 16. [5] (i) $\angle APD \cong \angle CPB$, (ii) होय. $\angle ADP \cong \angle PBC$,
$\angle PAD \cong PCB$, (iii) $\triangle APD$ संगत $\triangle CPB$.

[6] $\triangle ADP \sim \triangle CBP$ कारण $\angle DAB \cong \angle DCB$.
$\angle APD \cong \angle BPC$.
$\angle ADP \cong \angle CBP$.
कोकोको समरूपता प्रमेय.

कारण समरूप त्रिकोण.

$\therefore l(AP) \times l(PB) = l(PC) \times l(DP)$.

[7] (i) BC; QR; BO. (ii) PQ; AC; ABC. (iii) BC, [illegible]CD. [8] 50
[9] (i) C, (ii) 9. [10] (ii) l(BC)

प्रश्नसंग्रह 4·7

[1] (i) 16, (ii) $2\sqrt{11}$, (iii) 13, (iv) $5\sqrt{3}$; [2] (ii) 52, (iii) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

[3] (i) 52, (ii) 84, (iii) 84, (iv) 28, (v) 138;

[4] (i) $d(P, D)=\frac{15}{8}$, $d(D, C)=\frac{49}{8}$. (ii) $d(P, C)=12$, (iii) $d(P, B)=32$.

[5] (i) $d(R,C)=12$, (ii) $d(R,C)=8\sqrt{10}$. (iii) $d(R,A)=25$, (iv) $d(R,A)=18$.

[6] —(ii) 52, $d(R, C)=\sqrt{52}$. (iii) 64, $d(R, A)=16$, $d(R, B)=4$

(iv) 18, $d(R, C)=\sqrt{18}$ (v) 13, $d(R, B)=\frac{13}{\sqrt{17}}$.

प्रश्नसंग्रह 4·11

[1] —(i) 45, (ii) 27, (iii) 35, (iv) 12. [2] $d(Q,T)=7$, $d(S,Q)=21$ किंवा 6 [3] नाही [4] —(i) $d(A,B)$ 12, (ii) $d(P, M)=2\sqrt{91}$

[5] 2 त्रिज्येचे एककेंद्री वर्तुळ.

प्रश्नसंग्रह 4·14

[1] 20. [2] $9\sqrt{3}$

स्वाध्याय (पान 91)

[1] (i) $l(DC)=12$. (ii) $l(CE)=4$. (iii) 20. (iv) 6. (v) 12.

[2] (i) सत्य. (ii) सत्य. (iii) असत्य. (iv) असत्य.

[3] (i) 13. (ii) $4\sqrt{3}$. (iii) 12. (iv) $2\sqrt{3}$.

प्रश्नसंग्रह 5·8

[1] (a) (i); (b) (iii); (c) (ii).

प्रश्नसंग्रह 5·12

[1] कोन दुभाजक. [2] चार बिंदू. [3] (a) आहेत; स्पर्शबिंदूतून जाणारी त्रिज्या लंब असते. (b) होय, एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या. (c) होय. (d) होय. (e) होय.

प्रश्नसंग्रह 5·16

[1] (a) AB आणि AC. (b) A आणि G. (c) $\triangle AEB$. (d) अंतरभागात.

[2] (a) $l(AG)=8$. (b) $l(CD)=\frac{15}{2}$. (c) $l(BF)=6x$. (d) $l(GF)=\frac{5}{3}$.

[3) $l(AE)=6\sqrt{3}$.

स्वाध्याय (पान 106)

[1] (i) दोन सेमी त्रिज्येच्या वर्तुळाच्या आंतरभागातील बिंदूंचा संच. (ii) विरुद्ध कोन दुभाजक. (iii) एक सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ. (iv) लंब दुभाजक. (v) त्रिकोणातील आंतरवर्तुळाचा केंद्र. (vi) अर्धवर्तुळ. (vii) कोन दुभाजक. (viii) रेषेला काढलेला लंब. (ix) मध्य बिंदू. (x) बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या लंब दुभाजकांच्या रेषांचा छेदबिंदू.

[2] 1=(ii); 2=(iii); 3=(iv); 4=(i). [3] छेदतील. [5] असमांतर बाजू एकरूप असाव्यात.

[6] (i) समभुज त्रिकोण. (ii) काटकोन त्रिकोण. (iii) समभुज त्रिकोण. (iv) एक बिंदू असणारा संच. (v) काटकोन त्रिकोण. (vi) समद्विभुज त्रिकोण. (vii) कोन A चा कोन दुभाजक BC ला D मध्ये मिळतो. रेषा AD वरील A आणि D बिंदू सोडून सर्व बिंदूंचा संच. (viii) समभुज त्रिकोण.

प्रश्नसंग्रह 6·4

[1] सत्य विधाने :–(i), (ii), (vi), (ix), असत्य विधाने :–(iii), (iv), (v), (vii), (viii), (x).

[2] (i) त्रिज्या, (ii) छेदिका, (iii) व्यास, (iv) जीवा, (v) त्रिज्या, (vi) जीवा, (vii) छेदिका (viii) त्रिज्या, (ix) व्यास, (x) छेदिका.

[3] (i) निम्मी. (ii) आंतरभागात. (iii) गोलावर. (iv) छेदिका. (v) बिंदू रेषाखंड, रेषा.

[4] [i] E, (ii) I, (iii) I, (iv) E, (v) I, (vi) I, (vii) N, (viii) S, (ix) I, (x) E, (xi) N.

[5] (i) रेख AP व रेख PB, रेख PD व रेख CD, (ii) रेख CD, रेख AP, (iii) रेख AB रेख CD (iv) रेख CD, (v) समांतरभुज चौकोन (vi) आयत.

प्रश्नसंग्रह 6·8

[1] सत्य विधाने :—(a), (b), (c), (e), (f), (g). असत्य विधाने :—(d).

[2] (i) दोन बिंदू, (ii) दोन बिंदू, (iii) महावर्तुळ, (iv) लघुवर्तुळ, (v) दोन वर्तुळे, (vi) एकमेकांस छेदणारी दोन महावर्तुळे. [3] $2\sqrt{7}$. [4] (i) 7, (ii) 16, (iii) 24, (iv) 48.

स्वाध्याय (पान 117)

[1] (i) स्पर्शप्रतल, (ii) $l(PQ) < r$, (iii) प्रतल व गोल यांमध्ये बिंदू समाईक असेल तर. (iv) लंब असते, (v) 16, (vi) 41, (vii) होय, (viii) अनंत, (ix) व्यास त्रिज्येच्या दुप्पट असतो. [2] N ची स्थिती S, I, I, E.

[3] (i) एकबिंदू, (ii) बाहयभागात, (iii) आंतरभागात, (iv) असू शकत नाहीत. (v) दोन बिंदू किंवा एक बिंदू, (vi) नसतो.

[4] सत्य विधाने—(iii), (iv), असत्य विधाने—(i), (ii), (v).

[5] रेषा PA $\perp$ रेषा AB, रेषा AC, रेषा AD. [6] 3 सेमी.

प्रश्नसंग्रह 7·7

[1] 288 चौ. सेमी. [2] 338·40 चौ. सेमी. [3] 259·8 चौ. सेमी. [4] 166·272 चौ. सेमी. [5] 4 एकक. [7] $2\sqrt{3}$ सेमी.; $24\sqrt{3}$ चौ. सेमी. [8] 120 सेमी. [9] 3850 चौ. सेमी. [10] 300 रुपये.

प्रश्नसंग्रह 7·10

[1] 264 मी. [2] 4·4 किमी. [3] 78·50 रुपये. [4] 320 फेरे. [5] 170 फेरे. [6] 35·64 ताशी किमी. [7] 0·3 मी. [8] 12810 किमी. [9] 70 मी. [10] 271 मी. [11] 22 मी. [12] 2,413,056 कि. मी.

प्रश्नसंग्रह 7·13

[1] (i) 78·54 चौ. सेमी. (ii) 314·16 चौ. सेमी. (iii) $3{\cdot}1416n^2$ (iv) $314{\cdot}16n^2$. (v) $31416n^2$. [2] (i) 15400 चौ. सेमी. (ii) 22176 चौ. मी. (iii) 183·26 चौ. सेमी. (iv) 3·465 चौ. मी. (v) 86·625 चौ. मी. [3] 78·50 चौ. मी. [4] 74536 रुपये. [5] 46·585 चौ. मी. [6] 1650 रुपये. [7] 1078 चौ. सेमी. [8] 346·5 चौ. मी. [9] 78·57 चौ. सेमी., 157·14 चौ. सेमी. [10] १ सेमी., 195·43 चौ. सेमी.

प्रश्नसंग्रह 7·15

[1] (i) $\frac{5\pi}{6}$, (ii) $\frac{7\pi}{3}$, (iii) $\frac{25\pi}{6}$ (iv) $2{\cdot}8\pi$, (v) $\frac{25\pi}{12}$, (vi) 12π, (vii) 5π, (viii) 288, (ix) 5, (x) 15.

[2] 5·86 सेमी. [3] 6·54 सेमी. [4] 59.29 [5] (a) 6·28 सेमी. (b) 3·14 सेमी.

प्रश्नसंग्रह 7·17

[1] (i) 25π, (ii) 20π, (iii) 50π, (iv) 60π, (v) 90π, (vi) $3{\cdot}53\pi$
[2] (i) 90, (ii) 150, (iii) 60, (iv) 150. [3] (i) 120, (ii) 350,
(iii) 22, (iv) 200, (v) 50, (vi) $\frac{r^2}{2}$. [4] 36·225 चौ. सेमी.
[5] 13·104 चौ. सेमी.

स्वाध्याय (पान 133)

[1] (i) (a), (b), (c), (e), (f), (h) बहुभुजाकृती.
[2] (i) वर्तुळपाकळी, (ii) $13{\cdot}5\pi$ चौ. सेमी. (iii) 3π सेमी.
[3] (i) वर्तुळखंड, (ii) 150·72 चौ. सेमी. (iii) 62·28 चौ. सेमी. (iv) 88·44 चौ. सेमी.
[4] 45·68 चौ. सेमी. [5] दुसरे. [6] 5·65 चौ. सेमी. [7] 2·52 चौ. सेमी.
[8] 8·376 सेमी., 11·517 सेमी. [9] 28 मी. [10] 54·4 चौ. सेमी.

प्रश्नसंग्रह 9·7

[1] lPR, $\frac{l(PQ)}{l(PR)}$, $\frac{l(RQ)}{l(PQ)}$ [2] $\frac{l(AB)}{l(BC)}$, $\frac{l(AC)}{l(BC)}$, $\frac{l(AC)}{l(AB)}$.
[3] $\frac{l(MP)}{l(MN)}$, $\frac{l(PT)}{l(MT)}$, $\frac{l(NP)}{l(MP)}$.
[4] $\frac{x}{y}$, $\frac{x}{z}$, $\frac{z}{y}$. [5] $x=16$, $y=12$. [6] $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$. [7] $\frac{40}{41}$.

प्रश्नसंग्रह 9·13

[1] $\frac{60}{61}$, $\frac{11}{60}$. [2] $\frac{\sqrt{7}}{3}$. [3] $\operatorname{Sin} A=\frac{3}{5}$, $\operatorname{Cos} A=\frac{4}{5}$.
[4] $\operatorname{Sin} B=\frac{1}{\sqrt{8}}$, $\operatorname{Cos} B=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$.

प्रश्नसंग्रह 9·18

[1] (i) $\frac{1}{8}$, (ii) $\frac{3}{2}$, (iii) $3+4\sqrt{3}$, (iv) -2. [2] $l(AC)=200$,
$l(BC)=100\sqrt{3}$.
[3] $l(BC)=\frac{50}{\sqrt{3}}$, $l(DC)=50\sqrt{3}-\frac{50}{\sqrt{3}}$.
[4] 66 [5] (i) वाढते. (ii) लहान. [6] $\frac{70\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$.

प्रश्नसंग्रह 9·23

[1] 17·24138 (मीटर ठोकळमानाने). [2] 14·928 cm. [3] 170·13 m. [4] 20·8 m.
[5] 539·77272 m. [6] 739 m. (ठोकळमानाने).

स्वाध्याय (पान 163)

[1] (i) $\frac{l(MC)}{l(BC)}$, (ii) $\frac{l(BM)}{l(MC)}$.
[2] $l(PD)=9{\cdot}06$; $l(QD)=4{\cdot}23$, $l(DR)=14{\cdot}50$ $l(QR)=18{\cdot}73$.

[3] 8·39, 13·424 [4] 35·664

[5] (A) (i) Sin $\angle ABD = $ Cos $\angle BAD$. (ii) Sin $\angle ABD = $ Sin $\angle BCD$

(iii) Cos $\angle DBC = $ Cos $\angle BAD$.

(B) Sin $\angle DBC <$ Sin $\angle BCD$

[6] $x = 3{\cdot}42$; $r = 9{\cdot}40$; $y = 25{\cdot}80$; $z^2 = 754$.

[8] Cos $x = \frac{15}{17}$, [9] 27·47 m.

[10] $d(A, B) = 17{\cdot}331$; $d(D, B) = 5{\cdot}773$; $d(A, D) = 11{\cdot}558$ [11] $d(P, Q) = 40$.

[12] $[a(B, C) + 100] \times \frac{1}{\sqrt{3}} = d(D, C)$

$$d(D, C) + 100 = \sqrt{3} \times d(D, C), \; d(D, C) = \frac{100}{\sqrt{3} - 1}.$$

[13] 100·033. [14] 4·611 m.

प्रश्नसंग्रह 10·4

[1] A = (3, 7); B = (5, 3); C = (−3, 5), D = (−6, 2); E = (−6, −3);
F = (−2, −5); G = (3, −4); H = (6, −5).

[2] B, H...(iv) C, E...(ii) [3] (0, 0) [4] A(3); B(−5); C(O); D(−8).

[5] A, D... (I) E, G... (II) C,F... (III) B, H... (IV)

[6] F, H आणि C.
F(−3, −4), H(0, −4), C(5, −4).

[7] A, F......I C, F......II D, G......III H; B......IV

[8] 0. [9] 0. [10] (0, −2). [11] (4, 0); (−3, 0); (5, 0); (0, 0).

[14] 22. [15] D, B, A आणि C.

प्रश्नसंग्रह 10·8

[1] AB (−2, 4); CD (5, −4·5); EF (5·5, 4).

[2] (a) $(0, \frac{1}{2})$; (b) (4, 0); (c) (1, 1); (d) (4, 6). [3] M (3·5, −3).

[4] (a) (5, 8), (b) (−2, 6); (c) (5, −5); (d) $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$;
(e) $\left(-4\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4}\right)$; (f) $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

[5] (ii). [6] (6, 5). [7] $(\frac{17}{3}, \frac{23}{3})$. [8] (a) $(3, -\frac{1}{3})$.
(b) $(\frac{6}{7}, \frac{11}{7})$. (c) $(\frac{21}{5}, -\frac{7}{5})$.

[9] $(\frac{14}{3}, \frac{17}{3})$; $(\frac{16}{3}, \frac{19}{3})$; [10] (4, 2); [11] $a = 4$; $b = -1$

प्रश्नसंग्रह 10·12

[1] (a) 0. (b) समान. (c) रेषाखंड. (d) $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

[2] P = (1, 2); Q = (6, 2); R = (6, 4); $\frac{2}{5}$.

[3] रेख AB $\longleftrightarrow 4$; रेख CD $\longleftrightarrow 0$; रेख EF $\longleftrightarrow -\frac{4}{3}$.

[4] (a) 1. (b) $-\frac{1}{2}$. (c) -2. (d) $\frac{4}{3}$. (e) $-\frac{3}{2}$. (f) 4.

[5] डावीकडून उजवीकडे चढ धन (*a*) आणि (*f*) उजवीकडून डावीकडे (*b*), (*c*), (*d*) आणि (*e*) चढ ऋण.

[6] रेख AB $\longleftrightarrow \frac{3}{2}$. रेख BC $\longleftrightarrow 0$. रेख AC $\longleftrightarrow -\frac{3}{4}$.

[7] रेख PQ $\longleftrightarrow -1$; रेख QR $\longleftrightarrow 4$; रेख RS $\longleftrightarrow -1$; रेख PS $\longleftrightarrow 4$.

[8] $\frac{r-1}{1-5}$; [9] $\frac{1}{50}$; [10] 5; [11] 4.

प्रश्नसंग्रह 10·18

[1] (a) $y-y_1=m(x-x_1)$; (b) चढ 9; (c) (0, c) (d) (5, 3). [2] (a) 2; (b) 5; (c) $\frac{1}{3}$; (d) -5; (e) $\frac{8}{7}$ (f) 8. [3] (a) (0, 13); (b) (0, -5); (c) $(0, -\frac{7}{2})$; (d) $(0, \frac{35}{3})$. [4] (a) $y-2x+1=0$; (b) $y-4x+11=0$; (c) $y=\frac{x}{3}+8$; (d) $y=\frac{2}{5}x-\frac{11}{5}$; (e) $y=\frac{6}{7}x+6$. [5] (a) $y=2x-1$; (b) $y=\frac{1}{5}x+5$; (c) $y=-\frac{3}{5}(x-3)$; (*d*) $y=-\frac{12}{7}x-\frac{1}{7}$; (e) $y=-x-7$. [6] (a) 3; (b) 5; (c) $\frac{1}{2}$; (d) 1. [7] (a) $(\frac{3}{2}, 0)$; $(0, -3)$; (b) (5, 0); (0, -5); (c) (6, 0); (0, -4); (d) $(\frac{2}{35}, 0)$; $(0, -\frac{2}{7})$. [8] प्रकाश. [9] (i) $y=x+1$; (ii) $y=5x-11$; (iii) $y=4$; (iv) $x=-3$; (v) $y=0$; (vi) $x=0$; (vii) $y=-\frac{5}{3}(x+3)$; (viii) $y=-8x+29$; (0, 29), (0, 82), $(\frac{41}{4}, 0)$.

स्वाध्याय (पान 186)

[1] IV, I, III, II, III, IV; [2] (2, 0); [3] (0, -11); [4] (0, 2); [5] A(-1, 5); B(-1, 1); C(3, 1); D(3, 5); [6] P(-3, 2); Q(-3, -2); R(4, -2); S(4, 2); [7] (a) (3, 6); (b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; (c) $(\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$; (d) $\left(\frac{2a+b}{2}, \frac{b+2c}{2}\right)$ [8] $(\frac{17}{3}, 9)$; $(\frac{28}{3}, 11)$; [9] (0, -8); [10] (9, 0) [11] (i) (-3, 7); (ii) (-4, 9); (iii) (-11, 5). [12] (3, -7,); (7, -11); (1, -13); [13] (-3, 4); [14] (a) $(\frac{14}{5}, \frac{23}{5})$; (b) $(\frac{21}{5} - \frac{16}{5})$; (c) $(6, -\frac{56}{6})$. [15] (6, 8); [16] (8, 10); [17] $y=-4$; [18] (a) $\frac{2}{5}$; (b) -1; (c) $\frac{2}{9}$; [19] रेख AB $\longleftrightarrow \frac{11}{2}$; रेख BC $\longleftrightarrow \frac{2}{9}$; रेख AC $\longleftrightarrow -\frac{9}{7}$. [20] $y=\frac{11}{2}x-\frac{41}{2}$; $y=\frac{2}{9}x+\frac{53}{9}$; $y=-\frac{9}{7}x-\frac{1}{7}$; No., [21] रेषा AC $\longleftrightarrow y-7=x-7$; चढ 1. रेषा BD $\longleftrightarrow y-7=-(x-2)$ चढ -1.

[22] P मधून काढलेली मध्यगा $\longleftrightarrow y=-\frac{5}{3}x+12$.

Q मधून काढलेली मध्यगा $\longleftrightarrow y=\frac{7}{9}x+\frac{64}{9}$.

R मधून काढलेली मध्यगा $\longleftrightarrow y=\frac{1}{6}x+\frac{25}{3}$.

[24] समांतर रेषांचे चढ समान असतात. [25] होय. त्यांचे चढ समान आहेत.

[illegible] मराठी [illegible]

[illegible]

([illegible])

जून ८३	[illegible]	[illegible]
जुलै	गद्य पाठ – [illegible]	पद्य पाठ – [illegible]
	निबंध – वर्णनात्मक	[illegible]
		वृत्त – ओवी, [illegible]
ऑगस्ट	गद्य पाठ – ६, ७, ८	पद्य पाठ – ३, ५, ६, ७
	निबंध – व्यक्तिचित्र	वृत्त – पृथ्वी, इंद्रवज्रा मंदाक्रांता
		[illegible]
सप्टेंबर	गद्य पाठ – [illegible]	पद्य पाठ – [illegible]
	निबंध – [illegible]	[illegible]
	आत्मवृत्त	वृत्त – दिंडी, [illegible], प्रणयप्रभा
		शार्दूलविक्रीडित
ऑक्टोबर	गद्य पाठ – [illegible]	पद्य पाठ – [illegible]
	निबंध – मुलाखत	व्याकरण – [illegible], विरामचिन्हे
		वृत्त – जीवनलहरी
नोव्हेंबर	गद्य पाठ – १४, १५	पद्य पाठ – १४, १५
डिसेंबर	गद्य पाठ – १६, १७	पद्य पाठ – १६, १७
	निबंध – कल्पनारम्य	व्याकरण – पदपरिस्फोट
जाने. ८४	गद्य पाठ – १८, १९	पद्य पाठ – १८, १९
	सारांशलेखन	व्याकरण – वाक्य पृथक्करण
फेब्रुवारी	गद्य पाठ – २०	पद्य पाठ – २०, २१, २२
	पत्रलेखन, संवाद	व्याकरण – वाक्य संक्षेपण
मार्च	उजळणी	

◎ ◎

हिंदी (१०० गुण)

जून ८३	गद्य पाठ १, २	पद्य पाठ – क्र. १ व [illegible]
		व्याकरण – शब्द भेद (संज्ञा, सर्वनाम)
जुलै	[illegible]	पद्य पाठ [illegible]
		व्याकरण – विशेषण, क्रिया, मुहावरे कहावतें
ऑगस्ट	गद्य पाठ – ५, ६	पद्य पाठ – क्र. ४
		व्याकरण – क्रिया विशेषण, संबंध बोधक
सप्टेंबर	गद्य पाठ – ७, ९	पद्य पाठ – क्र. ५
		व्याकरण – विस्मयादि बोधक, समुच्चय बोधक
ऑक्टोबर	गद्य पाठ – १०	पद्य पाठ – क्र. ६
		व्याकरण – शब्दभेद पुनरावृत्ति, मुहावरे, कहावतें.
नोव्हेंबर	गद्य पाठ – १२	पद्य पाठ – क्र. ७
		व्याकरण – पुनरावृत्ति
डिसेंबर	गद्य पाठ – १३, १४	पद्य पाठ – क्र. ९
		व्याकरण – मुहावरे, कहावतें.
जानेवारी ८४	गद्य पाठ – १५, १६	–
	व्याकरण – पुनरावृत्ति	

निबंध – जानेवारी १९८४ अखेर पर्यंत एकूण ८ निबंध पूर्ण करणे.

निबंधामध्ये पत्रलेखन – (घरेलू, कामकाजासबंधी, व्यावसायिक)

निबंध – वर्णनात्मक कल्पनामूलक, वैचारिक, अनुवाद, तसेच सारलेखन, वृत्तांतलेखन, गद्य आकलन इत्यादींचा समावेश असावा.

हिंदी ([illegible])

सत्र [illegible]

[illegible]

सितंबर गद्य पाठ – ४ पद्य पाठ – ३

व्याकरण [illegible]

ऑक्टोबर गद्य पाठ – ५ [illegible]

सत्र २ रे

नोव्हेंबर गद्य पाठ – ६ पद्य पाठ – ५

निबंध – [illegible]

[illegible] गद्य पाठ – ७, ८ [illegible]

निबंध – [illegible]

जानेवारी ८४ गद्य पाठ – ९ पाठ्यक्रमकी पुनरावृत्ति

संस्कृत (गुण [illegible])

सत्र १ ले

महिना	गद्य	पद्य	व्याकरण
जून ८३	१, २	—	शशिन्, पंचम गण
जुलै	३, ४	५	व्यंजनसंधी, द्वन्द्व, कर्मधारय द्विगु, नञ् तत्पु.
ऑगस्ट	६, ७	—	व. का. धा. वि. भगवत्, वधू ब्रू, हन्
सप्टेंबर	८, ९	१०	विभक्ति तत्पु. राजन्, आत्मन् कर्मन्, अलक्, उपपद तत्पु.
ऑक्टोबर	११, १२, १३	१४	दा (३ उ. प.), ग्रह (९ उ. प.) प्रयोजक, कर्म. भू. धा. वि.

[illegible]

सत्र १ ले

[illegible]

बीजगणित

सत्र १ ले

[illegible]	[illegible]
	एकचलीय समीकरणे व शाब्दिक प्रश्न
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]

सत्र २ रे

[illegible]	बहुपदी
डिसेंबर	[illegible], गुणोत्तरीय बैजिक राशी
जानेवारी ८४	गुणोत्तर प्रमाण, संपूर्ण अभ्यास पूर्ण करणे
[illegible]	[illegible])

भूमिती

सत्र १ ले

[illegible]	[illegible])
[illegible]	पायथागोरस प्रमेय, [illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	वर्तुळ जीवा व कंस
ऑक्टोबर	सत्र – १ अभ्यास उजळणी

सत्र २ रे

नोव्हेंबर	वर्तुळ परीघ व क्षेत्रफळ
डिसेंबर	भौमीतिक रचना
जानेवारी ८४	समरूपता, संपूर्ण अभ्यासक्रम पूर्ण करणे
फेब्रुवारी	उजळणी (वर्षाच्या अभ्यासाची)

[illegible]

Composition – A letter to your friend

[illegible]

All the topics to be completed before the first term

[illegible]

Composition – A business letter

December — Prose – 14, 15, 16

Poem – [illegible]

Composition – A visit to a hospital

January 84 — Prose – 17

Composition – from given points write 25 lines.

February — Revision.

भौतिकशास्त्र

सत्र १ ले

जून ८३	सदिश व अदिश राशी
जुलै	गती, न्यूटनचे गती विषयक नियम
ऑगस्ट	कार्य, ऊर्जा, शक्ति

सप्टेंबर	[illegible]
ऑक्टोबर	[illegible]
नोव्हेंबर	उजळणी

सत्र २ रे

डिसेंबर	[illegible]
जानेवारी ८४	विद्युत [illegible] प्रकाशकीय उपकरण
फेब्रुवारी	उजळणी

रसायनशास्त्र

सत्र १ ले

जून ८३	प्रकरण १ ([illegible])
जुलै	प्रकरण २
ऑगस्ट	प्रकरण ३
सप्टेंबर	प्रकरण ४ व ५-चालू
ऑक्टोबर	प्रकरण ५ पूर्ण व प्रकरण ६
नोव्हेंबर	उजळणी

सत्र २ रे

डिसेंबर	प्रकरण ७ व ८
जानेवारी ८४	प्रकरण ९ व १० चालू
मार्च	प्रकरण १० पूर्ण करणे व उजळणी पेपर्स

जीवशास्त्र

जून ८३	प्रकरणे – १ ते ३
जुलै	प्रकरणे – ४ ते ७
ऑगस्ट	प्रकरणे – ८ ते १२
सप्टेंबर	प्रकरणे – १३ ते १६
ऑक्टोबर	उजळणी

सप्टेंबर [illegible] प्रकरण [illegible]
ऑक्टोबर [illegible] प्रकरण [illegible]
नोव्हेंबर [illegible]
फेब्रुवारी [illegible]

समाजशास्त्र

	इतिहास प्रकरण	ना. शा. प्रकरण
जून ८३	३, ४	–
जुलै	५, ६	९
ऑगस्ट	[illegible]	[illegible]
सप्टेंबर	९, १०	१० चालू
ऑक्टोबर	११	१० पूर्ण
नोव्हेंबर	१३	–
डिसेंबर	१४	११
जानेवारी ८४	१५	१२
फेब्रुवारी	उजळणी	उजळणी

भूगोल

जून ८३	प्रकरणे १, २
जुलै	प्रकरणे ४, ५
ऑगस्ट	प्रकरणे ६, ७
सप्टेंबर	प्रकरणे ८, ९
ऑक्टोबर	प्रकरण १०
नोव्हेंबर	प्रकरणे ११, १२
डिसेंबर	प्रकरणे १३, १४
जानेवारी ८४	प्रकरणे १५, १६
फेब्रुवारी	प्रकरणे १७, १८
मार्च	उजळणी.

चित्रकला

प्रथम सत्र

प्रात्यक्षिक – [illegible]

[illegible]

[illegible] चित्र – २

[illegible] चित्रे गृहपाठ

लेखी – पुस्तक – कलेचा इतिहास आणि रसग्रहण

(महाराष्ट्र राज्य माध्यमिक शिक्षण मंडळ)

प्रकरण – २२, २३, २४, २५, २६

द्वितीय सत्र

प्रात्यक्षिक – रचना चित्रे – २

स्थिर चित्र – १

संकल्प चित्रे – २

वरील सर्व चित्रे गृहपाठ

लेखी – प्रकरण – २६, २७, २८, १, २, ३, ४

अर्थशास्त्र

जून ८३	पाठ – १
जुलै	पाठ – २ व ३
ऑगस्ट	पाठ – ४, ५, व ६
सप्टेंबर	पाठ – ७ व ८
ऑक्टोबर	पाठ – ९ व १०
नोव्हेंबर	पाठ – ११ व १२
डिसेंबर	पाठ – १३ वा
जानेवारी ८४	पाठ – १४ वा
फेब्रुवारी	उपान्त्य परीक्षा